МАТЕМАТИКА ГАРМОНИИ: ИННОВАЦИИ В ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ, В ОСНОВАНИЯХ МАТЕМАТИКИ, В ОБРАЗОВАНИИ

Абачиев Сергей Константинович
S. K. Abachiev
Институт Государственного управления, права и инновационных технологий. Москва, Андроновское шоссе, д. 24а.
College of the Government, the right and innovative technologies
Кандидат философских наук, и. о. профессора
The candidate of philosophical sciences who is performing the duties the professor
E-mail: abachiev@yandex.ru

Стахов Алексей Петрович
A.P. Stakhov
Доктор технических наук, профессор
International Club of the Golden Section (Canada)
Doctor of Sciences in Computer Sciences, Professor
E-mail: goldenmuseum@rogers.com

Статья третья

Треугольник Паскаля и спектр арифметик для цифровых информационных технологий

Pascal's Triangle and the spectrum of digital arithmetic's for information technology

Аннотация: В статье сконцентрирована информация о новых свойствах арифметического треугольника Паскаля, открытых в 40–80-х гг. XX в. Диагональные суммы чисел треугольника Паскаля в качестве предельного случая генерируют двоичный ряд, лежащий в основе двоичной системы счисления. Она господствует в современных цифровых информационных технологиях, но двоичный код лишён свойства избыточности. Дальнейшие диагональные суммы треугольника Паскаля генерируют последовательность Фибоначчи и её аналогов. Эти последовательности могут быть положены в основу иррациональных систем счисления. Порождаемые ими коды обладают избыточностью. Им органически присуща повышенная помехоустойчивость, которая в 70–80-х гг. XX в. была доказана и на практике. Далее треугольник Паскаля представляется как многоуровнево-иерархичная система натуральных чисел. На его структурном уровне простых чисел в 80-х гг. были открыты числовые фракталы, представляемые в оптимальной, цветографической символике. На основе общеметодологического принципа соответствия делается прогноз о том, что эти числовые фракталы могут порождать качественно более эффективные информационные технологии в сравнении с уже известными кодами золотых пропорций. Подчёркивается актуальность стартовых теоретических исследований в этом направлении и их развития.

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11^{00} – до 18^{00})
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

The Abstract: The article focuses on the new information about the arithmetic properties of Pascal's triangle, which has been obtained in 40th-80th of the 20 century. As a limiting case, the diagonal sums of Pascal's triangle generate the binary sequence, which underlies classical binary system.. This number system dominates in the modern digital information technologies, but the binary code does not have code redundancy and cannot detect errors in the digital computers. However, the further diagonal sums of Pascal's triangle generate the Fibonacci sequence and its analogues. These sequences can be the basis of the number systems with irrational radices. These number systems generate a new class of redundant codes. Their code redundancy can be used for increasing noise immunity of computers what has been proved in practice in the 70th – 80th of the 20 century. Pascal's triangle can be represented as a multilevel, hierarchical system of natural numbers. On its structural level of prime numbers in the 80th years the numerical fractals, presented in optimal color graphical symbolism, have been found. Based on the general methodological principle of correspondence, it is made a forecast that these numerical fractals can produce qualitatively more effective informational technology in comparison with the known codes of the golden proportion. There is stressed the importance of starting the theoretical studies in this area and their development.

Ключевые слова: перечислительная комбинаторика, диагональные суммы треугольника Паскаля, золотая пропорция, обобщения золотой пропорции, иррациональные системы счисления, избыточные коды, помехоустойчивость, структурный уровень, простые субэлементы-делители натуральных чисел, общесистемная подчинённость низшего высшему, числовые фракталы, принцип соответствия.

Keywords: enumerative combinatorics, diagonal sums of Pascal's triangle, the golden ratio, a generalization of the golden ratio, the number systems with irrational radices, redundant codes, noise immunity, structural level, the simple sub-elements as divisors of natural numbers, the general-theoretical subjugation of the lower to the supreme, numerical fractals, the principle of correspondence**.**

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11^{00} – до 18^{00})
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

* * *

Прежде всего, я верю в будущее теории чисел, и я надеюсь, что недалеко то время, когда неопровержимая арифметика одержит блестящие победы в области физики и химии.

Герман Минковский

Треугольник Паскаля так прост, что выписать его сможет даже десятилетний ребенок. В то же время он таит в себе неисчерпаемые сокровища и связывает воедино различные аспекты математики, не имеющие на первый взгляд между собой ничего общего. Столь необычные свойства позволяют считать треугольник Паскаля одной из наиболее изящных схем во всей математике.

Мартин Гарднер

Едва ли кто-нибудь из нематематиков в состоянии освоиться с мыслью, что цифры могут представлять собой культурную и эстетическую ценность…

Норберт Винер

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Фрактальная революция началась в геометрии, но стремительно перерастает в общематематическую и общенаучную

В последние десятилетия стали довольно популярными сетования философствующих учёных на затяжную неспособность теоретической физики породить нечто подобное релятивистской и квантовой революции первой трети XX в. В частности, завершить формирование Единой теории элементарных частиц и полей. Но, во-первых, сама эта проблема проблем неклассической физики неизмеримо сложнее тех проблем, которые стояли перед физикой в героическую эпоху создания квантовой механики, частной и общей теорий относительности. Во-вторых, вся история теоретической физики XVII–XX вв. свидетельствует о том, что великим переворотам в теоретической физике предшествуют великие перевороты в математике. Сначала были аналитическая геометрия Декарта и его понятие функциональной зависимости в координированном пространстве, а уж на этой основе – исчисление бесконечно малых в версии Ньютона и Лейбница как язык классической динамики. Сначала была теория комплексной плоскости как органичный синтез планарной тригонометрии и элементарной алгебры, а уж на этой основе – многообразие физических теорий сложных колебательных и волновых процессов. Сначала были неевклидовы геометрии XIX в. и тензорный анализ как их аналитический аппарат, а уж на этой основе – геометродинамика Эйнштейна и современная эволюционная космология. Следует особо подчеркнуть, что это были перевороты в ***геометрических первоосновах*** математики.

Наконец, в третьих, хотя наука второй половины XX в. и не принесла эпохальных открытий масштаба релятивистской и квантовой революций, она принесла новый и радикальнейший переворот именно в геометрической первооснове математики – фрактальную революцию Б. Мандельброта (1924–2010). Ей неполные 40 лет от роду, но уже сейчас понятно, что эта неевклидова геометрия является несравненно более радикальной, нежели неевклидовы геометрии XIX в. ***Наука коренным образом математически перевооружается, начиная с геометрических первооснов математики. И это – верный предвестник исторически беспрецедентных переворотов в теоретическом естествознании, в прикладных науках, в технологической практике человечества.***

Можно уверенно предположить, что величайшая фрактальная революция в геометрии рано или поздно будет востребована в области синтетического слияния Единой теории элементарных частиц с квантовой космологией. В отличие от 50–60-х гг. XX в., теперь понятно, что будущая Единая теория элементарных частиц должна быть, прежде всего, квантово-релятивистской теорией гравитации, а релятивистская теория гравитации даже в своей макроскопической версии – это геометродинамика. Её эффективное микроскопическое обоснование не может остаться в стороне от новейшей неевклидовой революции в геометрии. Но это – дело неопределённого будущего, непредсказуемое в своём конкретном облике. Это так хотя бы уже потому, что на пути к превращению в микроскопическую геометродинамику фрактальная геометрия должна будет органично «офизичиться» по подобию былых «физикализаций» геометрии Евклида в специальной теории относительности и неевклидовой геометрии Римана – в геометродинамике Эйнштейна. А это потребует, скорее всего, уже целой плеяды гениев эйнштейновского ранга. Но и первых успехов фрактальной революции, резюмированных на рубеже 80–90-х гг. XX в. всемирно знаменитой книгой [5], достаточно для того, чтобы оценить всю историческую беспрецедентность фрактальной версии неевклидовой геометрии. Отметим лишь небольшую часть её признаков.

1. Способность фрактальной геометрии строго математически просто и эффективно описывать «негладкие» объекты, которые традиционно считались нематематическими в само́й математике и не поддающимися математическому описанию в теоретическом естествознании. Например, горные массивы, облака, сеть кровеносных сосудов и нервных волокон, деревья с их окружением в лесу и т. п. Иначе говоря, фрактальная

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11^{00} – до 18^{00})
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

геометрия – это «полнокровная» геометрия, адекватная всему многообразию геометрических форм в неживой и в живой природе. (Что касается искусственной предметной среды, то она пока в большом и в малом базируется на канонах Евклидовой геометрии.)

2. Начало качественного преобразования теории вероятностей – её органичная фрактальная геометризация.
3. Превращение Б. Мандельбротом «элементарной» математики в экспериментальную науку с компьютером в классической роли научного прибора. Имеется в виду методология его исследований квадратичных итерационных преобразований на комплексной плоскости (фрактальных множеств Жюлиа), увенчавшихся открытием потрясающего фрактального множества Мандельброта. Широко понимаемую арифметику до этих открытий можно уподобить биологии до изобретения микроскопа. Сами эти открытия внесли в арифметику синергетические концепции обратной связи и нелинейности, устойчивости и перехода к динамическому хаосу, который может описываться только вероятностно.
4. Выявление полной идентичности хаотизации нелинейных процессов по сценарию Ферхюльста–Фейгенбаума как в итерационных процессах вычислительной математики, так и в многообразии физических, химических, биологических и даже экономических процессов. Иначе говоря, вычислительная математика, роль которой веками считалась сугубо вспомогательной, стала первооткрывательницей законов нелинейной динамики поистине вселенской общности.

И это – только самые первые плоды радикальнейшего обновления геометрической первоосновы математики, которые уже пожинаются далеко за пределами геометрии. Ничего даже отдалённо подобного не принесли неевклидовы геометрии XIX в. Решённые ими основные проблемы были сугубо геометрическими и несравненно более ограниченными – естественные обобщения Евклидовой геометрии на случаи искривлённых пространств.

Как это часто бывает в науке, исторически новейшая геометрическая фрактальная парадигма «раскрыла глаза» исследователям на фракталоподобную и сугубо фрактальную структуру объектов в таких областях математики, которые не являются геометрией. Это – теория чисел как широко понимаемая арифметика и перечислительная комбинаторика, известная с XVII в. ***Всё это уникально сведено воедино в арифметическом треугольнике Паскаля.***

У фрактальных субструктур треугольника Паскаля существенные отличия от геометрических фракталов. Во-первых, эти фракталы в первую очередь ***числовые,*** а уж потом – планарные геометрические. Во-вторых, если существенной отличительной особенностью геометрических фракталов считается их задаваемость только алгоритмом геометрического построения, то числовые фракталы треугольника Паскаля задаются моим рекуррентным формализмом их аналитического расчёта. В-третьих, если геометрические фракталы типа ковра Серпинского теоретически самоподобно дробятся до бесконечно малых элементов и дают «законченный» фрактал в асимптотическом пределе, то числовые фракталы треугольника Паскаля имеют чёткие пределы самоподобной делимости на элементы (*степенны́е* и, соответственно, *цветовые модули* на цветографических схемах, представляемых в §§ 8 и 9).

Математика гармонии (МГ) с её приложениями к особо эффективному и надёжному кодированию информации порождена «золотыми» числовыми последовательностями, которые генерируются диагональными суммами треугольника Паскаля. Последнее в полной мере было выявлено **Д. Пойя** [15], **В. Хоггатом** [16], **А. П. Стаховым** [17] и другими математиками. Но это – только один уровень МГ – ***МГ-1*** [9], [13], [14].

У треугольника Паскаля как планарной системы натуральных чисел есть наиболее глубокий структурный уровень – уровень организации простых субэлементов-делителей его элементов-чисел. На этом уровне явным образом безраздельно господствует их фрактальная организация по типу треугольного аналога ковра Серпинского, но существенно более сложная, интересная и эстетичная. Это в 80-х гг. было выявлено мной. Своей цветографической символикой я привёл разрозненные знания о «недрах» треугольника Паскаля к канонической форме, реализовал системный, целостный подход к его фрактальным субструктурам. Числовая природа этих субструктур и мной же открытая их аналитическая рассчитываемость позволяют с полной методологической уверенностью предположить, что на этом глубочайшем структурном уровне треугольника Паскаля МГ-1, генерируемая его диагональными суммами, имеет наиболее глубокие основания. Последние пока не изучены даже в духе стартовых исследований. В статье [4] я предложил назвать их ***МГ-2*** и показал, что МГ-1 в ключе научно-методологического ***принципа соответствия*** позволяет сделать эти эвристически-поисковые исследования достаточно концептуально осмысленными и целенаправленными.

В свою очередь, данная статья эту программу формирования МГ-2 в тесной преемственной связи с МГ-1 и на её основе представляет развёрнуто. Она концентрированно даёт ключевую конкретную информацию для осуществления стартовых исследований в этом направлении и для их дальнейшего развития.

Уже первые успехи фрактальной компьютерной графики показали, что фрактальное кодирование информации на много порядков более экономное и эффективное [6]. Есть все основания полагать, что будущая МГ-2 в полной мере сможет воплотиться в существенно фрактальной арифметической первооснове информационных супертехнологий, под которые современная квантовая теория вещества и нанофизика готовят посттранзисторную элементную базу и аппаратную основу.

Но на данном этапе важны стартовые исследования фундаментальных аспектов МГ-2, таящейся в недрах треугольника Паскаля, безотносительно к потенциально возможным приложениям к информационным технологиям обозримого будущего. Впрочем, может получиться и так, что соответствующий прикладной аспект МГ-2 будет выявлен уже в ходе первых таких исследований. Всё это могут показать только реальные исследования в данном направлении, которые следует начинать и разворачивать в любом случае.

§ 2. Треугольник Паскаля – один из стратегических объектов математики

В математике широко известна следующая формула:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n, \qquad (1)$$

где коэффициенты $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^k, \ldots, C_n^n$ называются *биномиальными коэффициентами*.

Это – одна из самых известных формул в математике. Наиболее часто она называется *биномом Ньютона*, хотя в этом названии заложена историческая несправедливость. Установлено, что формула (1) была известна ещё индийским и древне-арабским математикам; Ньютон же вывел формулу бинома для более общего случая, когда показатель степени n является произвольным рациональным числом (в том числе отрицательным).

Биномиальные коэффициенты могут быть выражены через факториалы следующим образом:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \; (n = 0,1,2,3,\ldots; k = 0,1,2,3,\ldots) \qquad (2)$$

Из (2) вытекают следующие «симметрические» свойства биномиальных коэффициентов:

$$C_n^k = C_n^{n-k} \qquad (3)$$

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1} \qquad (4)$$

Если в формуле (1) принять $a = b = 1$, то получим следующее тождество:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^k + ... + C_n^n . \quad (5)$$

Это тождество лежит в основе теории двоичного кодирования.

Если положить в формуле (1) $a = 1$ и $b = -1$, то получим:

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + ... + \left(-1\right)^k C_n^k + ... + \left(-1\right)^n C_n^n \quad (6)$$

Из формулы (6) вытекает, что в *биноме Ньютона* (1) сумма биномиальных коэффициентов C_n^k с чётными *k* равна сумме значений C_n^k с нечётными *k*.

В 17 в. знаменитый французский математик, физик и философ **Блез Паскаль** (1623–1662), используя свойство (4), предложил оригинальный способ вычисления биномиальных коэффициентов, расположив их в виде *арифметический треугольника*, называемого *треугольником Паскаля* (**илл.1**).

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
. . .

Илл 1. Треугольник Паскаля

Если очертить треугольник Паскаля, то получится равнобедренный треугольник. В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят единицы. Каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел. Числа в строках треугольника симметричны относительно вертикальной оси.

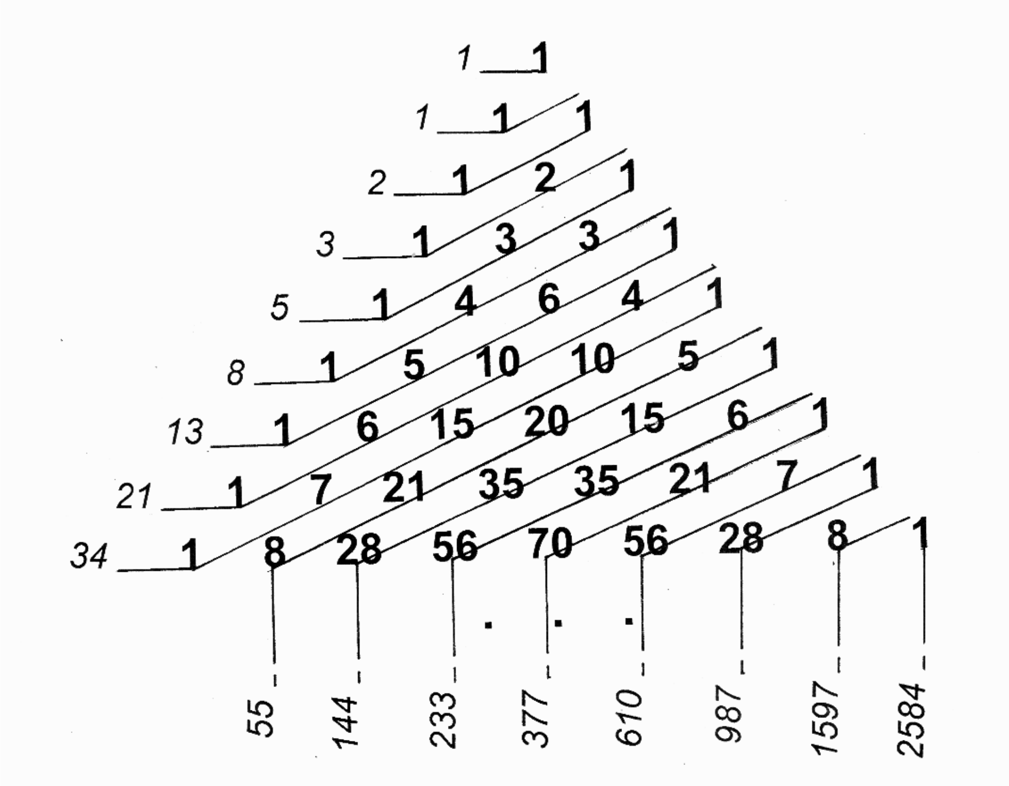
§ 3. Диагональные суммы треугольника Паскаля и *p*-числа Фибоначчи

Биномиальные коэффициенты и треугольник Паскаля широко используются в различных разделах математики, информатики и других науках. По существу, это – один из фундаментальных математических объектов, лежащих в основе точных наук. Знаменитый математик **Якоб Бернулли** в 18-м столетии отмечал:

«Эта таблица имеет ряд чудесных свойств. … мы показали, что она составляет существо теории соединений, но те, кто тесно соприкасаются с геометрией, знают, что она хранит ряд фундаментальных секретов этой области математики».

И теперь настало время рассказать еще об одной «тайне» *треугольника Паскаля* – о его связи с *числами Фибоначчи*. Эта тайна была раскрыта во второй половине 20 в. независимо друг от друга несколькими математиками. Считается, что первым это сделал известный венгерский, швейцарский и американский математик и популяризатор науки **Дьердь Пойа** (1887 –1985). В 1940 г. он переехал в США. Живя в США, Пойа много работал со школьными учителями математики и внёс большой вклад в популяризацию науки. Он написал несколько книг о том, как люди решают задачи и как надо учить решать задачи.

В книге «Математическое открытие» [15] он, возможно, впервые начал изучать так называемые диагональные суммы треугольника Паскаля, которые привели его к обнаружению связи треугольника Паскаля с числами Фибоначчи (**илл. 2**).



Илл. 2. Диагональные суммы треугольника Паскаля

Таким образом, изучая треугольник Паскаля, Дьердь Пойа сделал математическое открытие: он раскрыл математическую «тайну» треугольника Паскаля – его связь с числами Фибоначчи. Можно по-разному оценивать этот математический результат, но бесспорным является следующий факт: этот результат в течение нескольких столетий оставался неведомым как Блезу Паскалю, так и другим математикам, которые соприкасались с треугольником Паскаля.

В своей книге [15] **Дьердь Пойа** в виде упражнения предложил несколько задач, связанных с треугольником Паскаля. Первая из них состоит в том, чтобы выразить числа Фибоначчи через биномиальные коэффициенты, то есть, найти общую формулу для диагональных сумм треугольника Паскаля, задаваемые **илл. 2.**

Вторая задача оказалась более интересной и более сложной. Пойа увеличил наклон диагонали на **илл. 2** и установил, что при этом диагональная сумма порождает новую числовую последовательность: 1, 1, 1, 2, 3, 4, 9,13,.... обладающая строгой математической закономерностью. Он предложил доказать, что эта числовая последовательность задается рекуррентной формулой: $G_n = G_{n-1} + G_{n-3}$, а также выразить G_n через биномиальные коэффициенты. Затем в виде упражнения он предложил увеличить наклон диагонали и обобщить полученный результат, то есть, найти другие числовые последовательности, которые являются «диагональными суммами», и выразить эти «диагональные суммы» через биномиальные коэффициенты.

Таким образом, Пойа в книге [15] поставил (именно поставил, а не решил!) ряд интересных задач, связанных с исследованием диагональных сумм треугольника Паскаля. И в этом состоит его заслуга.

Необходимо подчеркнуть, что на русский язык книга [15] была переведена в 1970 г., хотя на английском языке эта книга была опубликована в 2-х частях в 1962 и 1965 гг. Существенно подчеркнуть, что исследования диагональных сумм продолжили американские математики-фибоначчисты. В частности, **Вернер Хоггатт** (создатель Фибоначчи-ассоциации) опубликовал в 1968 г. статью на эту тему [16].

Наиболее наглядно и полно суть «задачи Пойа» и её решение в общем виде изложено в книге **Алексея Стахова** «Введение в алгоритмическую теорию измерения» [17]. Для этого биномиальные коэффициенты были расположены в виде таблицы, напоминающей прямоугольный треугольник (**табл.1**), и названой *прямоугольным треугольником Паскаля*.

Таблица 1. Прямоугольный треугольник Паскаля

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		1	3	6	10	15	21	28	36
			1	4	10	20	35	56	84
				1	5	15	35	70	126
					1	6	21	56	126
						1	7	28	84
							1	8	36
								1	9
									1
1	**2**	**4**	**8**	**16**	**32**	**64**	**128**	**256**	**512**

Такая таблица начинается с «нулевого столбца», который содержит единственный биномиальный коэффициент C_0^0 = 1 и из «нулевой строки», который содержит биномиальные коэффициенты: $C_0^0 = C_1^0 = C_2^0 = ... = C_n^0 = 1$. Заметим, что «гипотенуза» прямоугольного треугольника Паскаля (**Табл. 1**) состоит из биномиальных коэффициентов типа $C_0^0 = C_1^1 = C_2^2 = ... = C_n^n = 1$.

Заметим также, что в *n*-м столбце сверху вниз расположены следующие биномиальные коэффициенты: $C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n$; при этом все клетки под «гипотенузой» являются «пустыми». Это означает, что все биномиальные коэффициенты типа C_n^k ($k>n$) тождественно равны нулю, то есть,

$$C_n^k = 0 \text{ при } k > n. \tag{7}$$

Теперь, если просуммировать биномиальные коэффициенты *n*-го столбца рассматриваемого треугольника Паскаля, то согласно (5) мы получим «двоичное число» 2^n. Если это сделать для всех столбцов, начиная с нулевого, то мы получим широко известный нам двоичный ряд чисел:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots, 2^n, \ldots . \tag{8}$$

Таким образом, треугольник Паскаля генерирует двоичный ряд чисел – арифметическую первооснову современных цифровых информационных технологий.

А теперь сдвинем каждую строку исходного треугольника Паскаля (**табл. 1**) на один столбец вправо относительно предыдущей строки. В результате такого преобразования мы получим некоторый «деформированный» треугольник Паскаля (**табл. 2**), который мы будем называть *1-треугольником Паскаля.*

Если теперь просуммировать биномиальные коэффициенты 1-треугольника Паскаля по столбцам, то, к нашему изумлению, мы обнаружим, что такое суммирование приведет нас к числам Фибоначчи (выделены жирным шрифтом):

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots, F_1(n+1), \ldots, \tag{9}$$

где через $F_1(n+1)$ обозначено $(n+1)$-е число Фибоначчи, которое задается с помощью следующей рекуррентной формулы:

$$F_1(n+1) = F_1(n) + F_1(n-1) \text{ при } n > 2 \tag{10}$$

при следующих начальных условиях:

$$F_1(1) = F_1(2) = 1. \tag{11}$$

Таблица 2. 1-треугольник Паскаля

1	1	1	1	1	1	**1**	1	1	1	1	1
		1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	10
				1	3	**6**	10	15	21	28	36
						1	4	10	20	35	56
								1	5	15	35
										1	6
1	**1**	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**	**21**	**34**	**55**	**89**	**144**

Анализируя **табл. 2**, легко найти математическую формулу, которая позволяет выразить числа Фибоначчи через биномиальные коэффициенты:

$$F_1(n+1) = C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + C_{n-3}^3 + C_{n-4}^4 + \ldots \tag{12}$$

Это означает, что в книге [17] была решена одна из задач, поставленных Пойа в книге [15].

В результате проведенных рассуждений мы нашли, что ***существует два способа представления чисел Фибоначчи: в виде рекуррентной формулы (10), (11) и в виде формулы (12), выражающей числа Фибоначчи через биномиальные коэффициенты.***

Используя формулу (12), 7-е число Фибоначчи $F_1(7)=13$ из **табл. 2** можно представить в виде следующей суммы биномиальных коэффициентов:

$$F_1(7) = C_6^0 + C_5^1 + C_4^2 + C_3^3 + C_2^4 + \ldots \tag{13}$$

Заметим, что биномиальный коэффициент C_2^4 в сумме (13) и все последующие за ним биномиальные коэффициенты тождественно равны нулю согласно свойству (7). Это означает, что выражение (13) на самом деле представляет собой конечную сумму биномиальных коэффициентов, то есть,

$$F_1(7) = C_6^0 + C_5^1 + C_4^2 + C_3^3 = 1 + 5 + 6 + 1 = 13 \tag{14}$$

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11[00] – до 18[00])
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

А теперь закрепим наш успех и перейдем к решению второй задачи Пойа, то есть, покажем, что прямоугольный треугольник Паскаля является источником новых числовых последовательностей, представляющих интерес как для теории чисел, так и для комбинаторики [17].

Рассмотрим ситуацию, когда в исходном треугольнике Паскаля (**табл. 1**) мы сдвигаем биномиальные коэффициенты каждой строки на p столбцов вправо относительно предыдущей строки, где $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Полученный таким путем «деформированный» треугольник Паскаля мы будем называть *p-треугольником Паскаля.*

Ясно, что 0-треугольник Паскаля, то есть, p-треугольник Паскаля, соответствующий $p = 0$, есть не что иное, как исходный треугольник Паскаля (**табл. 1**). 1-треугольник Паскаля, соответствующий случаю $p = 1$, представлен в **табл. 2**. P-треугольники Паскаля, соответствующие случаям $p = 2$ и $p = 3$, имеют следующий вид соответственно:

Таблица 3. 2-треугольник Паскаля

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
						1	3	6	10	15	21	28
									1	4	10	20
												1
1	**1**	**1**	**2**	**3**	**4**	**6**	**9**	**13**	**19**	**28**	**41**	**60**

Таблица 4. 3-треугольник Паскаля

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
				1	2	3	4	5	6	7	8	9
								1	3	6	10	15
												1
1	**1**	**1**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**7**	**10**	**14**	**19**	**26**

А теперь просуммируем по столбцам биномиальные коэффициенты 2- и 3-треугольников Паскаля. В результате мы получим две новые числовые последовательности (выделены жирным шрифтом):

$$\mathbf{1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60, \ldots} \quad (15)$$

$$\mathbf{1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 14, 19, 26, \ldots} \quad (16)$$

Обозначим n-е члены последовательностей (15) и (16), соответственно, через $F_2(n)$ и $F_3(n)$. Легко увидеть следующую закономерность в числовых последовательностях (15), (16), которую мы выразим с помощью следующих рекуррентных формул:

$$F_2(n) = F_2(n–1) + F_2(n–3) \text{ для } n \ge 4; \quad (17)$$

$$F_2(1) = F_2(2) = F_2(3) = 1; \quad (18)$$

$$F_3(n) = F_3(n–1) + F_3(n–4) \text{ для } n \ge 5; \quad (19)$$

$$F_3(1) = F_3(2) = F_3(3) = F_3(4) = 1. \quad (20)$$

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11[00] – до 18[00])
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

Таким образом, в результате проведенных рассуждений мы обнаружили две новые числовые последовательности. Первую их них, задаваемую рекуррентной формулой (17) при начальных условиях (18), назовем *2-числами Фибоначчи,* а вторую, задаваемую рекуррентной формулой (19) при начальных условиях (20), – *3-числами Фибоначчи* [17].

В общем случае (произвольное p), суммируя по столбцам биномиальные коэффициенты *p-треугольника Паскаля*, мы получим числовую последовательность, которая для заданного $p = 0, 1, 2, 3, ...$ будет задаваться следующим рекуррентным соотношением:

$$F_p(n) = F_p(n-1) + F_p(n-p-1) \quad \text{для} \quad n > p + 1 \tag{21}$$

$$F_p(1) = F_p(2) = ... = F_p(p+1) = 1. \tag{22}$$

Числовые последовательности, задаваемые формулами (21), (22), были названы *p-числами Фибоначчи* [17].

Ясно, что для случая $p = 0$ рекуррентная формула (21) и начальные условия (22) принимают следующий вид:

$$F_0(n) = F_0(n-1) + F_0(n-1) = 2F_0(n-1) \quad \text{для} \quad n > 1 \tag{23}$$

$$F_0(1) = 1. \tag{24}$$

Ясно, что рекуррентная формула (23) при начальных условиях (24) генерирует двоичные числа: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ..., которые и являются крайним частным случаем p-чисел Фибоначчи, соответствующим случаю $p = 0$.

Теперь рассмотрим случай $p = 1$. В этом случае мы получаем классические числа Фибоначчи.

Наконец, выясним, во что вырождаются p-числа Фибоначчи для случая $p = \infty$. Ясно, что для этого случая p-числа Фибоначчи задаются только формулой (22), то есть, ряд ∞-чисел Фибоначчи представляет собой бесконечную последовательность, состоящую из одних единиц.

Таким образом, в результате изучения диагональных сумм треугольника Паскаля мы получили бесконечное количество числовых последовательностей, названных *p-числами Фибоначчи* [17] и выражаемых общей рекуррентной формулой (21) при начальных условиях (22). Так как эти числовые последовательности являются обобщением числовой последовательности Фибоначчи, то это означает, что *p-числа Фибоначчи,* вытекающие из треугольника Паскаля, значительно расширяют существующую теорию чисел Фибоначчи [10]–]12]. Обобщенные числа Фибоначчи являются новым математическим результатом, полученным в рамках направления под названием «математика гармонии» [9], [13].

§ 4. «Фибоначчиевы» алгоритмы измерения и *p*-коды Фибоначчи

Следует отметить, что в книге [15] Пойа никаких исследований числовых последовательностей, вытекающих из диагональных сумм треугольника Паскаля, не проводил. Он просто обратил внимание на такие последовательности и поставил задачу выразить такие последовательности через биномиальные коэффициенты. Как упоминалось, решение задачи **Пойа** было сделано в книге **Алексея Стахова** [17]. Там, в частности, выведена формула, позволяющая для любого заданного $p = 0, 1, 2, 3,...$ выразить p-числа Фибоначчи через биномиальные коэффициенты:

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11[00] – до 18[00])
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

$$F_p(n+1) = C_n^0 + C_{n-p}^1 + C_{n-2p}^2 + C_{n-3p}^3 + C_{n-4p}^4 + \dots . \tag{25}$$

При $p = 0$ эта формула превращается в широко известную в комбинаторике формулу (5), позволяющую представить двоичные числа 2^n через биномиальные коэффициенты.

Важно отметить, что в работах **Игоря Витенько** и **Алексея Стахова** [18], [19], которые предшествовали книге [17], *p-числа Фибоначчи* были введены не в связи с исследованием диагональных сумм треугольника Паскаля, а в связи с созданием так называемой *алгоритмической теории измерения* [17]. Одним из наиболее неожиданных результатов этой теории стал новый класс оптимальных («фибоначчиевых») алгоритмов измерения, основанных на *p-числах Фибоначчи*. Оказывается [17], что если ввести ограничение на измерение, вытекающее из так называемого *принципа асимметрии измерения*, то оптимальным решением является система «весовых гирь», основанная на *p-числах Фибоначчи*, которые задаются с помощью рекуррентного соотношения (21) при начальных условиях (22), то есть, система «весовых гирь» для оптимального алгоритма измерения имеет вид:

$$\left\{F_p(n), F_p(n-1), F_p(n-2), \dots, F_p(i), \dots, F_p(2), F_p(1)\right\}. \tag{26}$$

Доказано ([17]–[19]), что с помощью системы гирь (26) можно взвесить все грузы Q в диапазоне $\left[0 \div F_p(n+p+1)\right]$. При этом взвешивание начинается со старшей гири $F_p(n)$, которая разбивает диапазон измерения $\left[0 \div F_p(n+p+1)\right]$на два поддиапазона $\left[0 \div F_p(n)\right]$ и $\left[F_p(n) \div F_p(n+p+1)\right]$. Заметим, что длина второго поддиапазона равна разности $F_p(n+p+1) - F_p(n)$, которая в соответствии с основным рекуррентным соотношением (21) равна

$$F_p(n+p+1) - F_p(n) = F_p(n+p).$$

При этом суть «фибоначчиевых» алгоритмов измерения состоит в последовательном разбиении на каждом шаге исходного диапазона измеряемых величин и всех последующих диапазонов в «фибоначчиевом» отношении, основанном на рекуррентном соотношении (21).

Подобно тому, как «двоичный» алгоритм измерения порождает «двоичную» систему счисления, *«фибоначчиевые» алгоритмы измерения* [17], порождают новые способы позиционного представления натуральных чисел, названные в [17] *p-кодами Фибоначчи*:

$$N = a_n F_p(n) + a_{n-1} F_p(n-1) + \dots + a_i F_p(i) + \dots + a_1 F_p(1), \tag{27}$$

где $a_i \in \{0, 1\}$ – двоичная цифра i-го разряда кода (27); n – разрядность кода (27); $F_p(i)$ – вес i-го разряда, вычисляемый в соответствии с рекуррентным соотношением (21) при начальных условиях (22). Позиционное представление натурального числа N в виде (27) названо *p-кодом Фибоначчи числа N* [17].

Таким образом, изучение истории возникновения новых числовых последовательностей, названных *p-числами Фибоначчи* [17], приводит к следующим вывоам:

1. В 60-е годы 20 в. известный американский математик **Дьердь Пойа** обнаружил связь треугольника Паскаля с числами Фибоначчи [15]. Исследуя так называемые диагональные суммы треугольника Паскаля, он обнаружил новые рекуррентные числовые последовательности и поставил задачу выразить их через биномиальные коэффициенты. В 1968 г. известный американский математик **Вернер Хоггатт** опубликовал статью [16], посвященную этой теме. Наглядное и полное решение «задачи Пойа» (выра-

зить *p-числа Фибоначчи* через биномиальные коэффициенты) дано в книге **Алексея Стахова** [17]. Следует отметить, что эти исследования являются ещё одним убедительным свидетельством процесса «гармонизации математики», который, согласно [14], начался в 60-е годы 20 в.

2. В середине 60-х годов 20 в. независимо от **Д. Пойа** к этим же числовым последовательностям пришли украинские математики **Игорь Витенько** и **Алексей Стахов** при решении задачи синтеза оптимальных алгоритмов измерения [17], [18]. При этом были обнаружены так называемые «фибоначчиевые» алгоритмы измерения, основанные на *p*-числах Фибоначчи. Этот результат представляет фундаментальный интерес не только для теории чисел Фибоначчи [10]–[12], но и для теории систем счисления и теории чисел, поскольку «фибоначчиевые» алгоритмы измерения порождают новые способы позиционного представления чисел – *p-коды Фибоначчи.* Эти исследования привели к разработке новой компьютерной арифметики – *арифметике Фибоначчи* и к обоснованию новой концепции компьютеров – *компьютеров Фибоначчи* [20], что́ представляет фундаментальный интерес для теории цифровых информационных технологий.

§ 5. Золотые *p*-сечения

Однако дальнейшее развитие теории *p-чисел Фибоначчи,* вытекающих из треугольника Паскаля (**Пойа** [15] и **Хоггатт** [16]), теории *«фибоначчиевых» алгоритмов измерения* (**Витенько** и **Стахов** [18], [19]), а также теории *p-кодов Фибоначчи* (**Стахов** [17], [20]) привело ещё к одному математическому открытию, затрагивающему основания теории систем счисления и теории чисел. Речь идет об *обобщении задачи о золотом сечении* [21], [22].

Как известно, отношение соседних чисел Фибоначчи в пределе стремится к золотой пропорции, то есть,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}}=\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Считается, что эта формула доказана великим астрономом и математиком **Иоганном Кеплером,** и поэтому в его честь она называется *формулой Кеплера.*

Найдем предел отношения соседних *p*-чисел Фибоначчи $\frac{F_p(n)}{F_p(n-1)}$ при $n\to\infty$ **.** Если ввести определение:

$$\underbrace{\lim}_{n\to\infty}\frac{F_p(n)}{F_p(n-1)}=x, \tag{28}$$

то легко доказать, что это отношение является положительным корнем следующего алгебраического уравнения:

$$x^{p+1}-x^p-1=0. \tag{29}$$

Заметим, что уравнение (29) по существу задает бесконечное число алгебраических уравнений, так как каждому p = 0, 1, 2, 3,... соответствует своё алгебраическое уравнение типа (29). Обозначим через Φ_p положительный корень уравнения (29).

В частности, для случая $p = 0$ уравнение (29) вырождается в тривиальное уравнение $x = 2$, корень которого $\Phi_0 = 2$.

Для случая $p = 1$ уравнение (29) сводится к уравнению золотой пропорции:

$$x^2 - x - 1 = 0, \tag{30}$$

корнем которого является золотая пропорция $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Таким образом, уравнение (29) является обобщением уравнения золотой пропорции (30).

Заметим, что уравнение (29) может быть также получено в результате решения следующей геометрической задачи. Разделим отрезок AB точкой C в следующей пропорции:

$$\frac{CB}{AC} = \left(\frac{AB}{CB}\right)^p , \tag{31}$$

где $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Действительно, обозначим значение искомой пропорции $\frac{AB}{CB}$ через x, то есть,

$$\frac{AB}{CB} = x . \tag{32}$$

Учитывая, что $AB = AC + CB$, мы можем записать:

$$\frac{AB}{CB} = \frac{AC+CB}{CB} = 1 + \frac{1}{\frac{CB}{AC}} \tag{33}$$

Тогда, учитывая (31) и (32), выражение (31) может быть представлено в виде:

$$x = 1 + \frac{1}{x^p},$$

откуда вытекает алгебраическое уравнение (29), полученное нами при исследовании предела отношения соседних p–чисел Фибоначчи.

Заметим, что деление отрезка в пропорции (31) сводится к дихотомии для случая $p = 0$ и к классическому золотому сечению для случая $p = 1$. Учитывая это обстоятельство, деление отрезка AB точкой C в отношении (31) было названо *золотым p-сечением*, а положительный корень уравнения (29) *золотой p-пропорцией* [17], [21], [22].

Подставляя золотую p-пропорцию Φ_p вместо x в уравнение (29), получим следующее тождество для золотой p-пропорции:

$$\Phi_p^{p+1} = \Phi_p^p + 1 \tag{34}$$

Будем теперь многократно умножать и делить все члены тождества (34) на золотую p-пропорцию Φ_p; в результате получим ещё одно замечательное тождество, связывающее степени золотой p-пропорции:

$$\Phi_p^n = \Phi_p^{n-1} + \Phi_p^{n-p-1} = \Phi_p \times \Phi_p^{n-1}, n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots \tag{35}$$

Заметим, что для случая $p = 0$ ($\Phi_0 = 2$) тождество (35) сводится к следующему тривиальному тождеству для двоичных чисел:

$$2^n = 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 \times 2^{n-1}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots .$$

Для $p = 1$ $\Phi_1 = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и тождество (35) сводится к следующему известному тождеству для золотой пропорции:

$$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2} = \Phi \times \Phi^{n-1}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \quad (36)$$

В заключение отметим, что золотые *p*-пропорции, задаваемые уравнением (29), представляют собой новый класс математических констант, которые выражают некоторые новые «гармонии». И тот факт, что золотые *p*-пропорции непосредственно вытекают из треугольника Паскаля и представляют собой еще одну «тайну» треугольника Паскаля, придает им особое очарование.

Возникает вопрос: имеют ли эти «обобщенные золотые пропорции» какое-то значение для развития современной науки? Ответ на этот вопрос дает известный белорусский математик и философ **Эдуард Сороко** в книге «Структурная гармония систем» [23]. В этой книге он формулирует так называемый *закон структурной гармонии систем*, суть которого сводится к следующему:

«Обобщенные золотые сечения суть инварианты, на основе и посредством которых в процессе самоорганизации естественные системы обретают гармоничное строение, стационарный режим существования, структурно-функциональную ... устойчивость».

§ 6. Система счисления Бергмана и коды золотой пропорции

Но ещё больший интерес (в частности, для современной математики и информатики) представляют собой так называемые коды золотой пропорции, основанные на золотых *p*-пропорциях [21], [22].

Этому математическому результату предшествовало открытие, сделанное в 1957 г. юным (12-летним!) американским математиком **Джорджем Бергманом.** В статье [24] Бергман предложил необычный позиционный способ представления чисел:

$$A = \sum_i a_i \Phi^i, \quad (37)$$

где A – действительное число, a_i – двоичная цифра {0,1} i-го разряда, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots,$ Φ^i – вес i-го разряда, $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ (золотая пропорция) – основание системы счисления (37).

Заметим, что веса́ разрядов Φ^i $\left(i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\right)$ связаны друг с другом изящным соотношением (36).

В системе счисления Бергмана (37) основанием системы, то есть, началом исчисления является иррациональное число $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$, с помощью которого можно представить все действительные числа, то есть, иррациональное число $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ является исходным, первичным числом, с помощью которого можно представить все действительные числа, включая натуральные и рациональные. ***Именно поэтому у нас есть основание утверждать, что система Бергмана (37) является одним из наиболее важных математических открытий в области систем счисления после открытия позиционного принципа представления чисел (Вавилон, 2000 г. до н.э.) и десятичной системы (Индия, 5–8 столетия нашей эры).***

Используя понятие *золотой p-пропорции,* **Алексей Стахов** обобщил систему Бергмана (37) и предложил следующий способ позиционного представления чисел [21], [22]:

$$A = \sum_i a_i \Phi_p^i, \tag{38}$$

где $a_i \in \{0, 1\}$ – двоичная цифра i-го разряда системы счисления (38), $i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots$, Φ_p – основание системы счисления (38), причем веса разрядов Φ_p^i связаны друг с другом изящным соотношением (35).

Выражение (38) генерирует бесконечное количество новых двоичных (0,1) позиционных систем счисления, так как каждому p (p = 0, 1, 2, 3, …) соответствует своя система счисления типа (38). Заметим, что при p = 0 основание $\Phi_p = \Phi_0 = 2$, и поэтому система счисления (38) сводится к классической двоичной системе, лежащей в основе современных цифровых информационных технологий.

Для случая p = 1 основанием системы счисления (38) является классическая золотая пропорция $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$, и поэтому она сводится к системе Бергмана (37).

Заметим, что при $p > 0$ все основания Φ_p системы счисления (38) являются иррациональными числами. Это означает, что выражение (38) задает новый, более широкий класс систем счисления с иррациональными основаниями.

Таким образом, исследования **Джорджа Бергмана** [24] и **Алексея Стахова** ([21], [22]) привели к открытию нового класса позиционных систем счисления. Они могут стать основой новой арифметики качественно новых информационных технологий – *«золотых» информационных технологий,* основы которых изложены в работах [25]–[27].

Но системы счисления (37), (38) имеют фундаментальное значение и для развития математики, так как могут привести к созданию новой «элементарной теории чисел» – «золотой» теории чисел. Эта идея впервые изложена Алексеем Стаховым в статье «Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа» [28], опубликованной в Украинском Математическом Журнале по рекомендации академика Ю. А. Митропольского. Развитие этой идеи изложено в ряде статей А. П. Стахова [29]–[31], опубликованных на сайте Академии Тринитаризма.

Таким образом, новые системы счисления – ***системы счисления с иррациональными основаниями,*** впервые изложенные в работах [21], [22], [24], представляют фундаментальный интерес как для математики, так и для информатики. И все они, так или иначе, связаны с треугольником Паскаля – с одним из фундаментальных математических объектов.

§ 7. Биномиальные системы счисления

В связи с треугольником Паскаля и биномиальными коэффициентами уместно упомянуть ещё об одном научном результате – ***биномиальных системах счисления.*** Впервые они введены в книге [17] в процессе решения одной из задач синтеза *оптимальных алгоритмов измерения.* Биномиальная система счисления основана на биномиальном алгоритме измерения, который описывается с помощью «арифметического квадрата» (еще одна форма представления треугольника Паскаля). Суть биномиальной системы счисления состоит в представлении натуральных чисел в виде суммы биномиальных коэффициентов. Эта идея была развита в книге доктора технических наук, профессора **Алексея Борисенко** [32]. Примером биномиального представления являются формулы (12) и (25). Первая (12) из них есть является биномиальным представлением чисел Фибоначчи, а вторая (25) – биномиальным представлением *p*-чисел Фибоначчи. Если в сумах (12) и (25) биномиальные коэффициенты взять с двоичными коэффициентами {0,1}, то возникают биномиальные представления, с помощью которых можно представить все натуральные числа.

Вместе с тем, треугольник Паскаля в 80-х гг. XX в. преподнёс математикам, пожалуй, самые впечатляющие сюрпризы за всю многовековую историю его изучения. Несомненно, что они будут иметь многочисленные последствия для дальнейшей, качественно более глубокой разработки МГ. Этим новым обликам старого-доброго арифметического треугольника Паскаля посвящены последующие параграфы.

§ 8. Числовые фрактальные субструктуры треугольника Паскаля

На феноменологическом уровне эти свойства треугольника Паскаля впервые были выявлены мной в начале 1980 г. В общем, они, что́ называется, лежали на поверхности. Их математики могли открыть, начиная с самого́ Б. Паскаля, который впервые подверг арифметический треугольник данного типа разностороннему исследованию. Тем не менее, математикам для выявления этого чрезвычайно впечатляющего комплекса свойств веками не хватало чёткого исходного понимания своих объектов как ***многоуровнево-иерархичных систем с относительно автономными комплексами свойств на разных структурных уровнях.*** Такой исходный взгляд на объекты познания стал утверждаться только во второй половине XX в. под влиянием понятий и принципов кибернетики. Идею перехода на цветографическую символику я в данной статье воспроизвожу именно так, как она и пришла мне в голову в начале 1980 г. на основе исходного понимания треугольника Паскаля как ***многоуровнево-иерар-хичной системы натуральных чисел,*** которое будет особо рассмотрено в § 9.

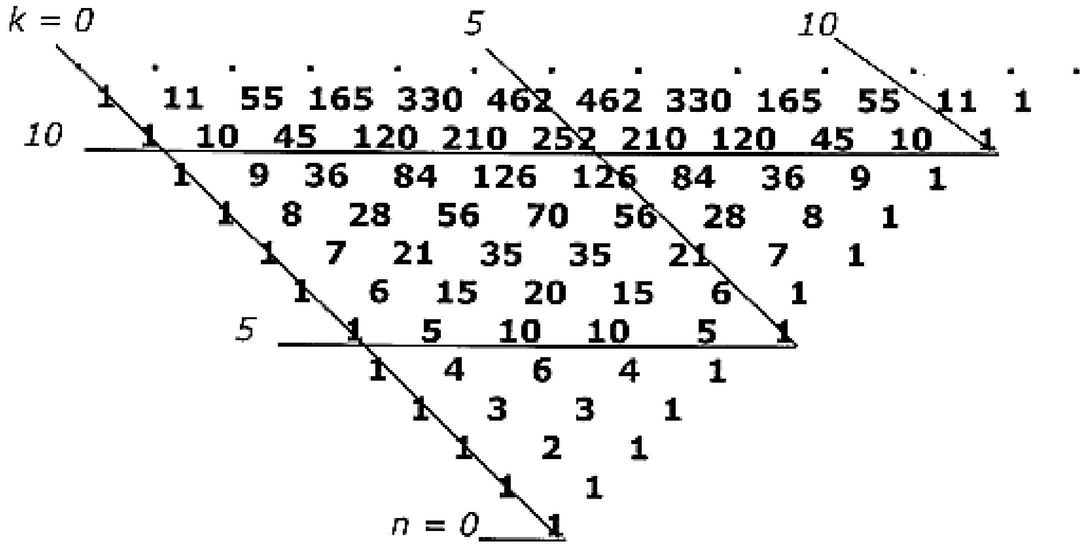
Красочные феноменологические схемы, представленные на **илл. 6–21**, чрезвычайно интересны и автономны сами по себе. Их развитие от **илл. 6** к **илл. 14**, от **илл. 14 к илл. 16** и от **илл. 17** к **илл. 21** направляется логикой усложнения идеально симметричных фракталов на плоскости. Эти фракталы *детерминистские*, т. е. имеющие однозначные алгоритмы построения из ***двух элементарных форм-модулей*** до сколь угодно развитых форм (теоретически). Но в конце 1987 г. мне удалось найти систематическое объяснение этой радужной фрактальной феноменологии. На началах рекуррентной формулы из комбинаторики она может быть легко и единообразно рассчитана вручную, без помощи компьютера. Но в этой связи мной была выявлена фундаментальная парадоксальность такого метода расчёта. О ней речь пойдёт в конце следующего параграфа.

Всё это превращает треугольник Паскаля в уникальный объект познания. Его элементарность на высшем уровне структурной организации натуральных чисел совмещается с нетривиальностью на низшем, наиболее глубоком уровне простых субэлементов-делителей. Исследование его свойств на высшем уровне доступно и школьнику. То же можно сказать и про исследование его глубинных свойств на феноменологическом уровне цветографических схем. Но при этом исследователь уже «предметно» приобщается к современным открытым проблемам теории чисел, комбинаторики, теории групп, фрактальной геометрии и даже синергетики, которые уникально сведены воедино на наиболее глубоком структурном уровне треугольника Паскаля. «Школьная» элементарность исследования при этом переходит в полноценное академическое исследование. Тщательно анализируя поуровневое познание этого уникального математического объекта, можно воочию увидеть и прочувствовать гносеологические законы становления и качественного реформирования теорий в физико-

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11⁰⁰ – до 18⁰⁰)
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

математи-ческих науках. Этими возможностями я сполна воспользовался в своей монографии по эволюционной теории познания [32, с. 268–292, 300–350], к некоторым результатам которой я обращусь в § 9.

Треугольник Паскаля используется для вычисления коэффициентов в полной формуле сокращённого умножения, которая известна как бином Ньютона. Алгоритм его построения элементарен. Вопреки традиции, я наращиваю треугольник Паскаля не сверху вниз, а снизу вверх, и представляю его заново. Это – сугубо конвенциональный вопрос удобства. Дальнейшее покажет, что так лучше оттеняется момент его поступательного усложнения, особенно – на наиболее глубоком структурном уровне простых субэлементов-делителей. Мой рекуррентный формализм аналитического расчёта числовых фракталов треугольника Паскаля также работает только при такой форме его представления.



Илл. 3. Треугольник Паскаля, развиваемый снизу вверх

Прежде всего, перед нами нагляднейший образец *системного* объекта как *целостного комплекса взаимосвязанных элементов*. В данном случае – натуральных чисел. От аморфного сборища чисел этот объект отличает наглядная организованность чисел на основе определённого закона. Словесно этот закон формулируется так: ***каждое число треугольника Паскаля есть сумма двух ближайших чисел с нижележащей строки.*** Зная этот закон, числовую систему можно наращивать неограниченно.

Придадим основному закону треугольника Паскаля вид алгебраической формулы. Поскольку числа только натуральные, обозначим это их свойство символом N. На поле чисел введём косоугольную координатную сетку из строк *n* и столбцов *k*. Тогда символом $N_{n,k}$ обозначится то обстоятельство, что многообразие натуральных чисел принадлежит треугольнику Паскаля. При этом словесной формулировке придаётся вид такой формулы:

$$\mathbf{N_{n,k} + N_{n,k+1} = N_{n+1,k+1}}\ , \qquad (39)$$

где $n = 0,1,2,3\ \ldots,\ k = 0,1,2,3,\ \ldots\ n$.

На числовом поле треугольника Паскаля ярко и наглядно выражена *инвариантность* этого отношения между числами, подобающая гносеологическому статусу *научного закона.* Какую бы тройку соседних чисел ближайших строк мы ни взяли, отношение между ними будет

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11^{00} – до 18^{00})
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

одно и то же. На каждом участке числового поля натуральные числа имеют свои конкретные значения, представляют собой числа самой разной значности, являются чётными или нечётными и т. д., но отношение (39) между ними везде неизменно. Это всеобщее инвариантное отношение и есть ***структура*** системы чисел, её ***организующее начало.*** Здесь наглядно видно и то, что для чёткой формулировки этого инвариантного отношения между конкретными числами требуется подняться на высокий уровень абстракции, отвлечься от этой числовой конкретики. Так обстоит дело и в реальной науке, но в данном случае всё наглядно и легко обозримо.

Подобно тому, как молекулы в качестве химических индивидов делятся на атомы, глубже которых уже кончается химия и начинается микрофизика, натуральные числа имеют свои «далее неделимые атомы». Такие числа называются ***простыми,*** поскольку они делятся только на самих себя, давая единицу, и на единицу, давая самих себя. В системе натурального ряда простые числа ведут себя нерегулярно и загадочно, и я выделю их подчёркиванием:

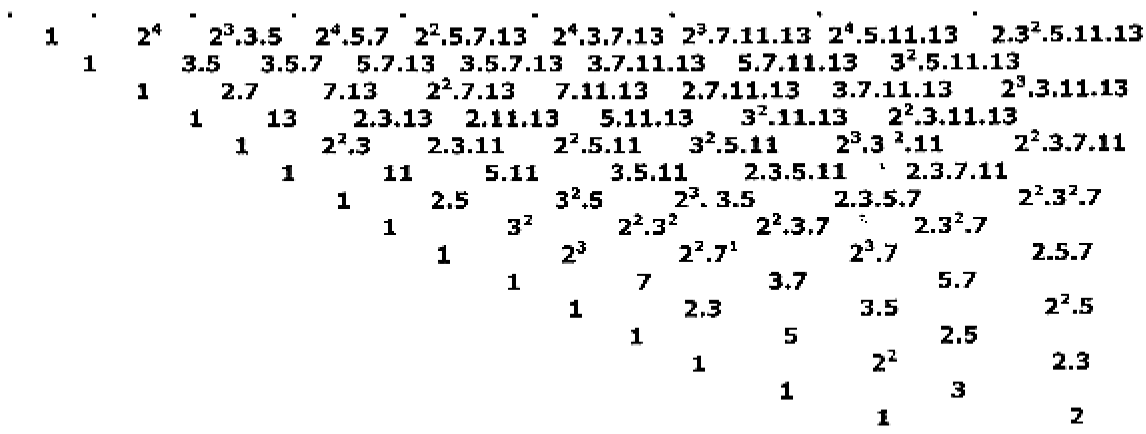
1**,** <u>2,</u> <u>3,</u> 4, <u>5,</u> 6, <u>7,</u> 8, 9, 10, <u>11,</u> 12, <u>13,</u> 14, 15, 16, <u>17,</u> 18 , <u>19,</u> 20, 21, 22, <u>23,</u> 24, 25, 26, 27, 28, <u>29,</u> 30, <u>31,</u> 32, 33 …

Остальные натуральные числа называются составными, поскольку каждое из них содержит своё уникальное произведение простых субэлементов-делителей в определённых степенях. Общеизвестный натуральный ряд, таким образом, является типичной *многоуровневой системой.* На её наиболее глубоком структурном уровне находятся действительно далее неделимые натуральные числа. Но эти числа неделимы только в качестве *натуральных,* в то время как их можно представлять в виде всевозможных произведений дробных субэлементов-делителей. В общем виде этот принцип устройства натуральных чисел можно представить в виде такого выражения:

$$\mathbf{N = 2^a.3^b.5^c.7^d.11^e.13^f \ldots}, \tag{40}$$

где a,b,c,d,e,f … = 0,1,2,3 …

Соответственно, и треугольник Паскаля имеет аналогичную субструктуру. Начальный этап развития треугольника Паскаля со структурированными числами $N_{n,k}$ представлен на **илл. 4.** В целях экономии места изображается только левая половина треугольника Паскаля, так как она исчерпывающе информативна ввиду его симметричности относительно вертикальной оси.

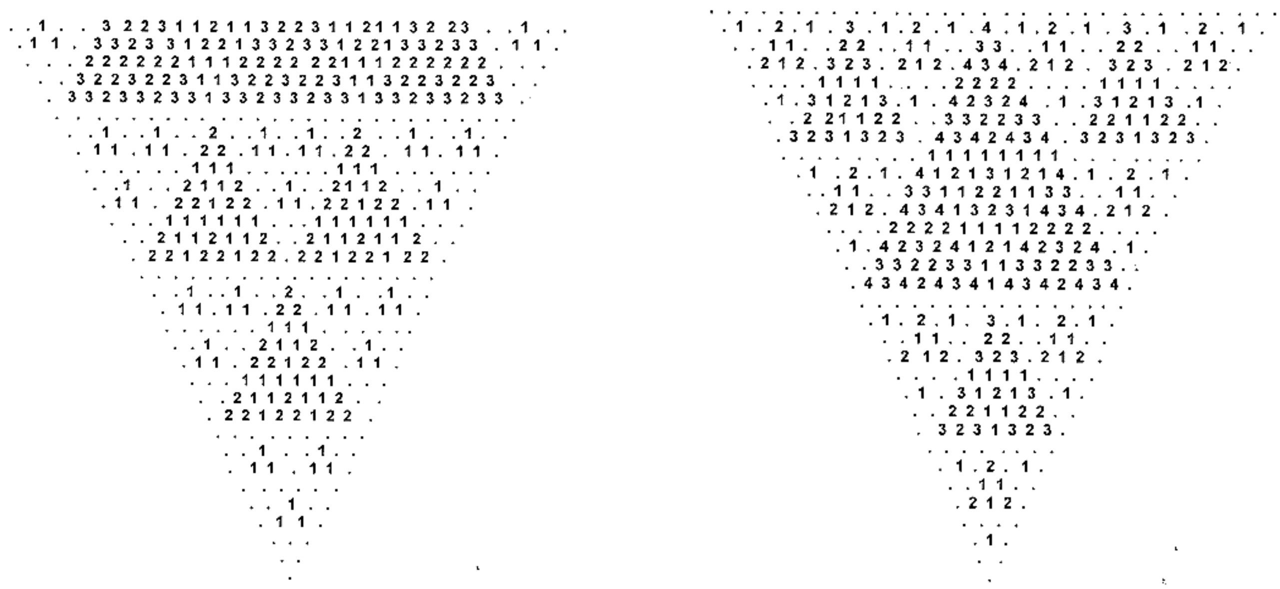


Илл. 4. Треугольник Паскаля со структурированными числами $N_{n,k}$

Уже здесь можно подметить важные закономерности поведения простых чисел в структурном фундаменте треугольника Паскаля. Во-первых, простые субэлементы-делители группируются в треугольные зоны за исключением делителя 2, который может быть представлен и точечно. Во-вторых, по мере развития треугольника Паскаля новые простые делители вступают в игру только со строки *n* с соответствующим номером. Это же относится и к степеням, в которых представлены простые субэлементы.

Однако чем дальше вверх по строкам *n*, тем числовая система становится более громоздкой, тем труднее отслеживать организацию простых субэлементов.

Результаты таких расчётов требуется представить в более компактной форме. Во-первых, следует отражать организацию каждого из простых субэлементов-делителей (2, 3, 5, 7 и т. д.) на отдельной схеме. Во-вторых, отсутствие в структуре конкретного числа $N_{n,k}$ простого субэлемента-делителя следует обозначать точкой, а его присутствие – только показателем степени, в которой он представлен. На **илл. 5А** таким образом отражена организация простого субэлемента-делителя 3 в пределах строк треугольника Паскаля $n = 0–31$, а на **ил. 5Б** – организация простого субэлемента-делителя 2 в этих же пределах.



А **Б**

Илл. 5. Компактные числовые схемы организации простых субэлементов-делителей 3 **(А)** и 2 **(Б)** в треугольнике Паскаля

Подобные схемы становятся особенно наглядными и эстетичными, если перейти к *цветографической символике*. Во-первых, числовая треугольная схема типа **илл. 5** заменяется треугольной схемой геометрических ячеек той или иной формы. Каждая ячейка обозначает то или иное число $N_{n,k}$. Во-вторых, на схеме числа $N_{n,k}$ следует представить в виде геометрической схемы ячеек, располагаемых в шахматном порядке, как и сами числа. В-третьих, условными цветами закраски ячеек следует обозначить показатели степеней, в которых тот или иной субэлемент представлен во внутренней структуре чисел $N_{n,k}$. В частности, здесь предлагается следующий цветовой код: незакрашенные ячейки на картинках обозначают такие числа $N_{n,k}$, которые не содержат в своей структуре простого субэлемента; красным ячейкам соответствует его присутствие в 1-й степени; оранжевым – во 2-й; жёлтым – в 3-й; зелёным – в 4-й; голубым – в 5-й; синим – в 6-й; фиолетовым – в 7-й; коричневым – в 8-й.

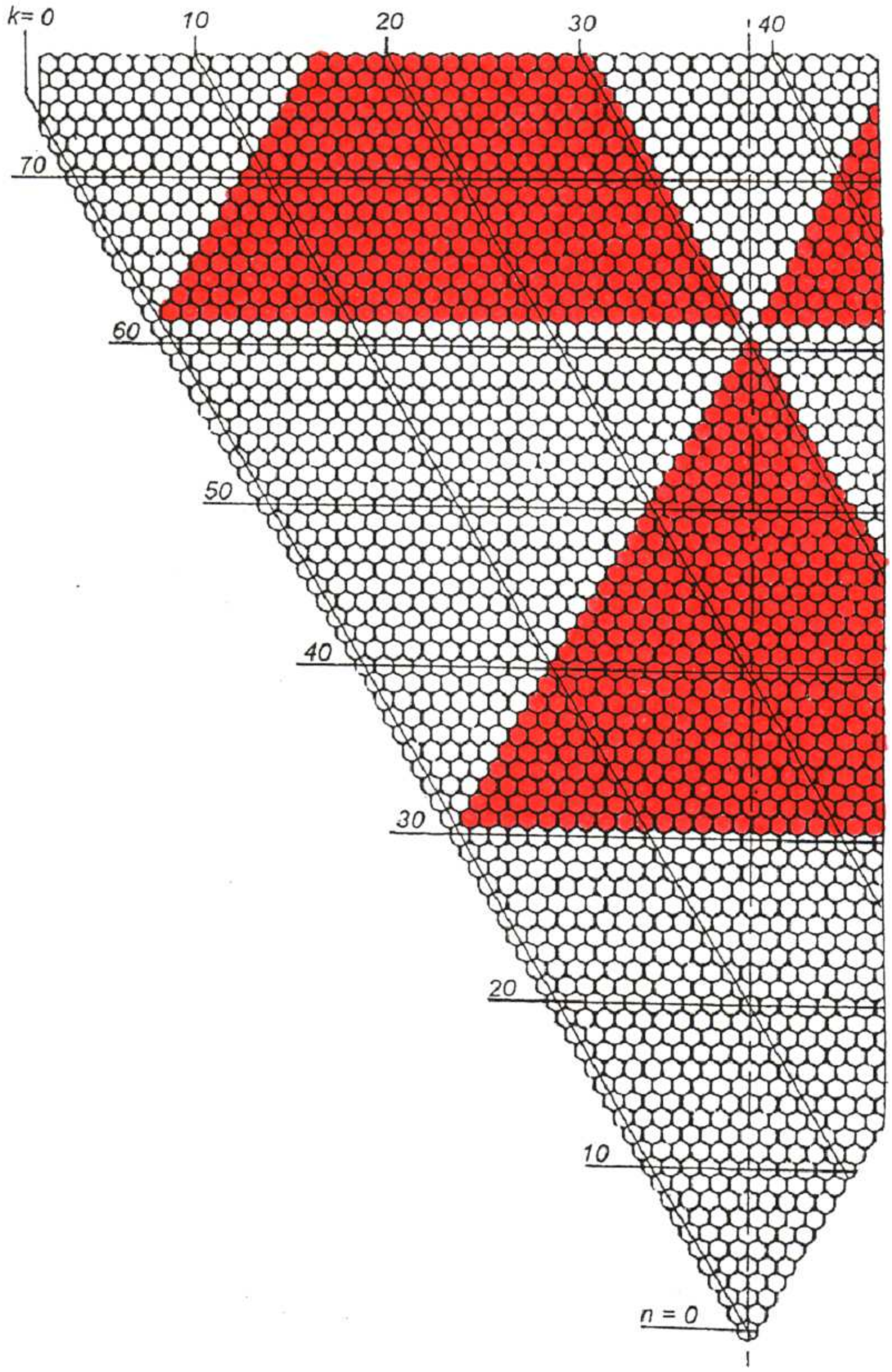
Серия цветографических схем на **илл. 6–21** представляет организацию в треугольнике Паскаля простых субэлементов-делителей 31, 23, 17, 11, 7, 5, 3 и 2.

Субструктуры треугольника Паскаля очевидным образом демонстрируют принципы ***фрактального самоподобия.*** На них отчётливо видно, что зоны сплошь закрашенных ячеек самоподобны: то, что́ находится под очередной сплошь закрашенной центральной фигурой, находится также слева и справа от неё. И так повторяется в большом и в малом вплоть до элементарных цветовых фигур (***цветоых модулей***), соответствующих представительству простого субэлемента-делителя в 1-й степени (зоны сплошной закраски красным цветом, включая точечные для простого субэлемента-делителя 2.)

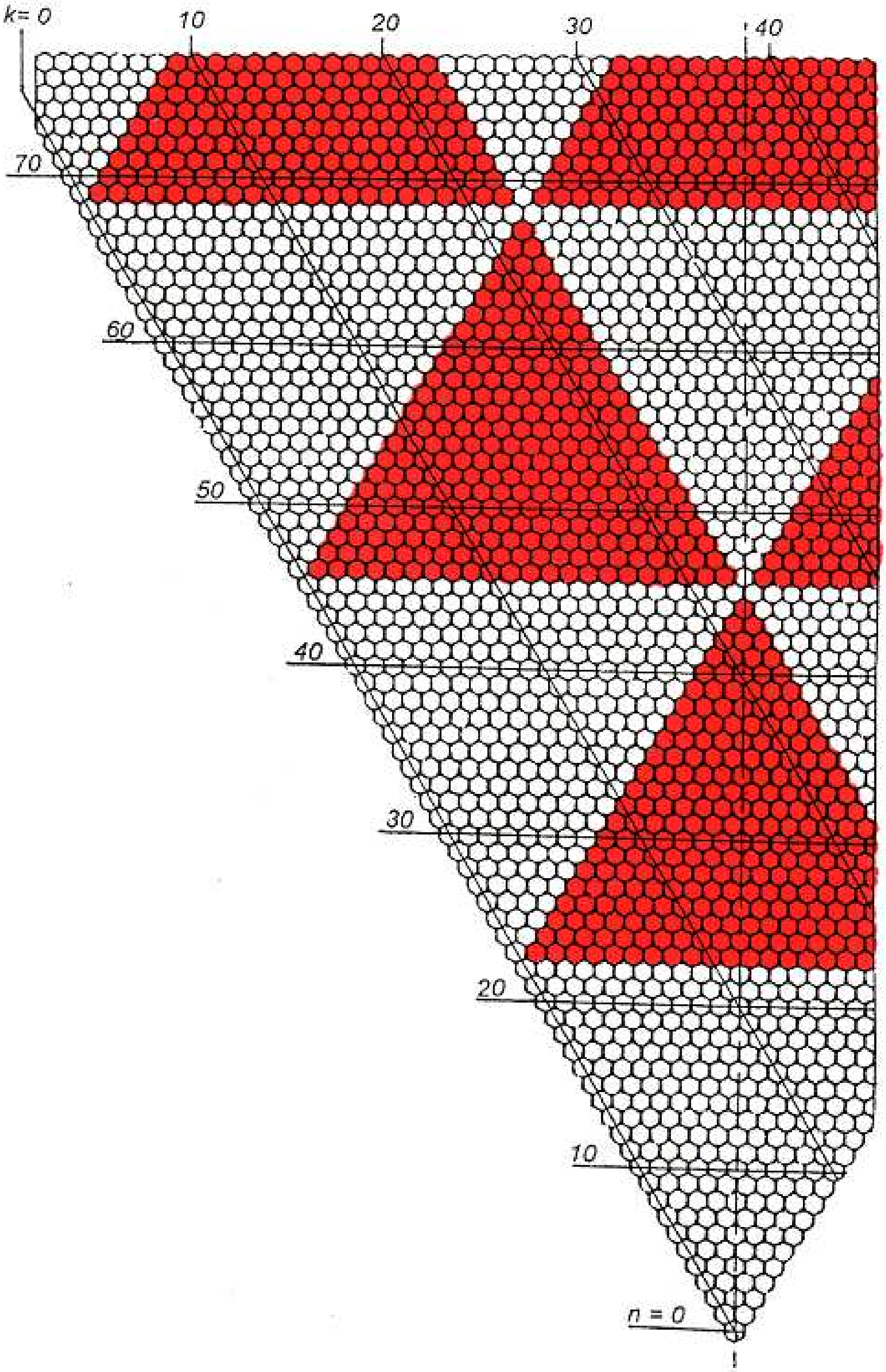
Выбор геометрических ячеек типа «пчелиные соты» лучше всего показывает, что во фрактальной организации простых субэлементов треугольника Паскаля безраздельно господствует то, что́ в теории групп называют *вращательной симметрией 3-го порядка*. Это значит, что цветовые структуры становятся тождественными через каждые 120^0, если вращать лист.

Интересно отметить, что треугольник Паскаля демонстрирует даже то, ка́к часть фрактальной организации его простых субэлементов фундаментального структурного уровня непосредственно «просвечивает» на высшем структурном уровне. Имея перед глазами развёрнутый треугольник Паскаля с «погашенной» субструктурой чисел $N_{n,k}$, невозможно увидеть, как организуются в треугольные зоны простые субэлементы 3, 7, 11 и др. Зато при этом на виду чётные числа и их самоподобные фрактальные группировки. Аналогично на высшем структурном уровне треугольника Паскаля явно проявляет себя геометрия расположения простого субэлемента 5, ибо содержащие его числа легко распознаются по пятёрке или нулю на конце. В общесистемном смысле это несколько напоминает «прямую трансляцию» сокровенных законов физического микромира в сверхпроводниках на макроскопический уровень наблюдаемых явлений.

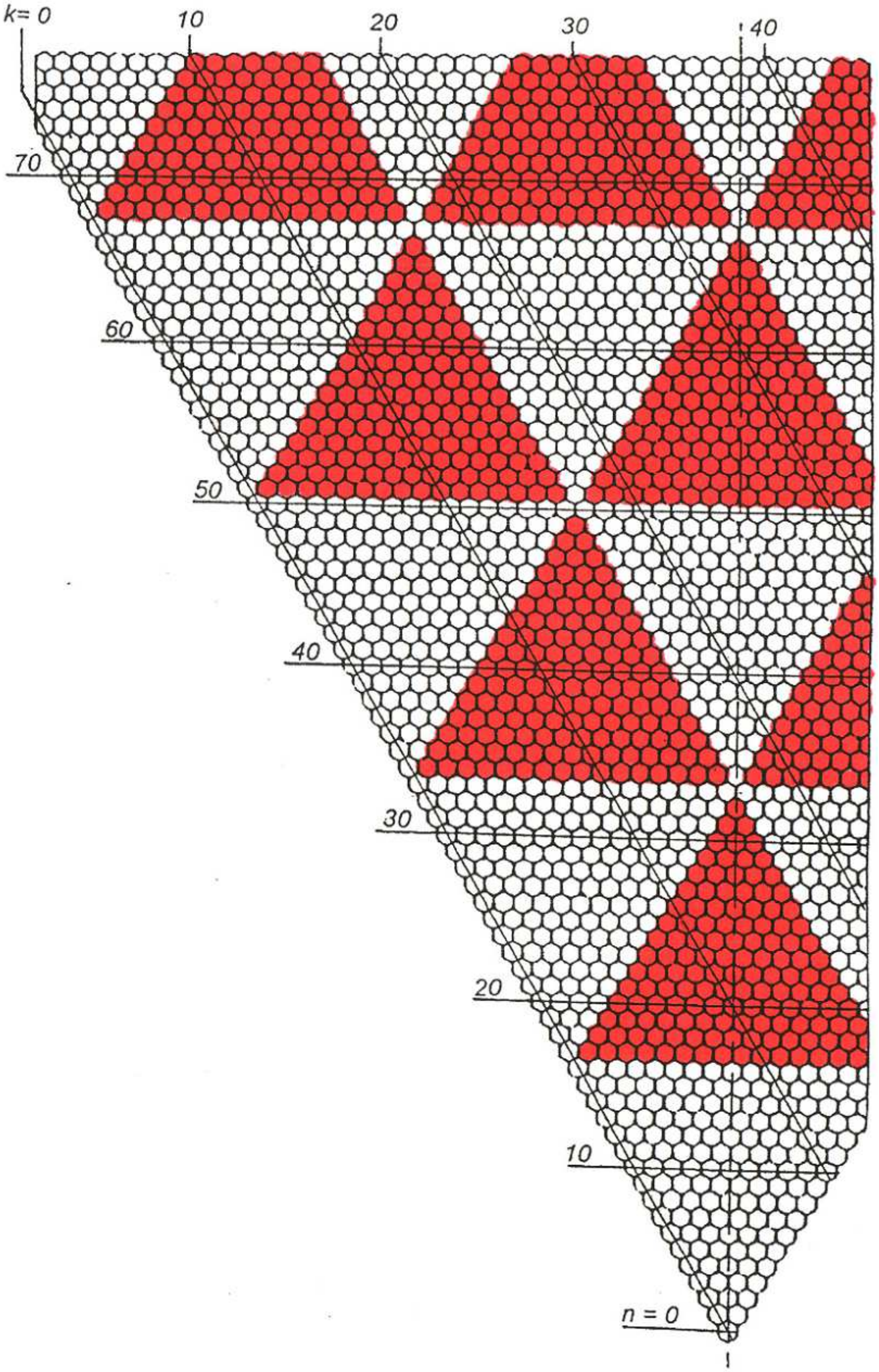
Двумерная цветографическая форма представления сложнейшей информации о «недрах» треугольника Паскаля является оптимальной. Она воочию представляет их потаённые законы, которые для одномерного, линейного дискурса математических доказательств в словах, понятиях и формулах оставались неуловимыми. Фрактальность его субструктур сама по себе давно не является новостью: достаточно обратиться к соответствующим картинкам в Интернете к ключевым словам «треугольник Паскаля». Но всё это только на уровне констатаций. Компактно и исчерпывающим образом субструктуры треугольника Паскаля могут быть отражены только с учётом фактора степеней его субэлементов-делителей, кодируемых условными цветами. В сочетании с рекуррентным алгоритмом расчёта его числовых фракталов, который представляется в следующем параграфе, цветографические схемы приводят соответствующие знания к ***канонической форме.***



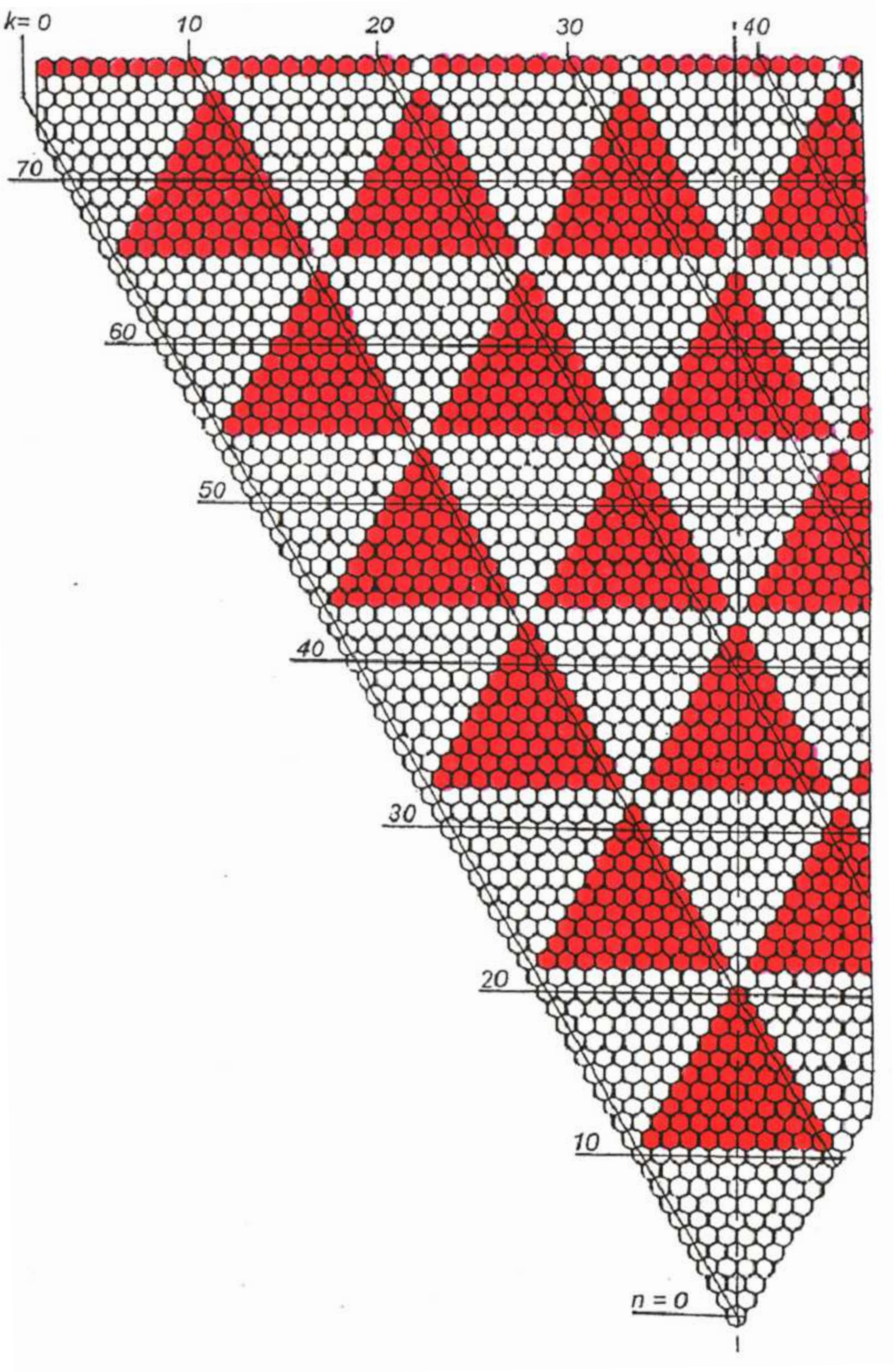
Илл. 6. Организация простого субэлемента-делителя 31 в пределах $n = 0 \div 77$. На цветографической схеме числа $N_{n,k}$, содержащие простой субэлемент 31^1, образуют обширную треугольную зону из сплошь закрашенных ячеек. В принятых здесь условных цветах эти ячейки красного цвета. Число красных ячеек основания этого треугольника 30, т. е. на единицу меньше, чем простое число 31. Назовём эту зону ***первым степенны́м модулем.*** В цветографической символике ему наглядно соответствует ***первый цветовой модуль. Второй степенно́й*** (и соответственно, ***цветовой***) ***модуль*** появится только со строки $n = 31^2 = 961$.



Илл 7. Организация простого субэлемента-делителя 23 в пределах *n = 0 ÷ 77*. Здесь также представлены только первые цветовые модули. Здесь, как и вообще для всех простых субэлементов-делителей, количество красных ячеек в основании первого цветового модуля равно 22, т. е. на единицу меньше, чем простое число 23. Второй цветовой модуль впервые заявит о себе только со строки $n = 23^2 = 529$.

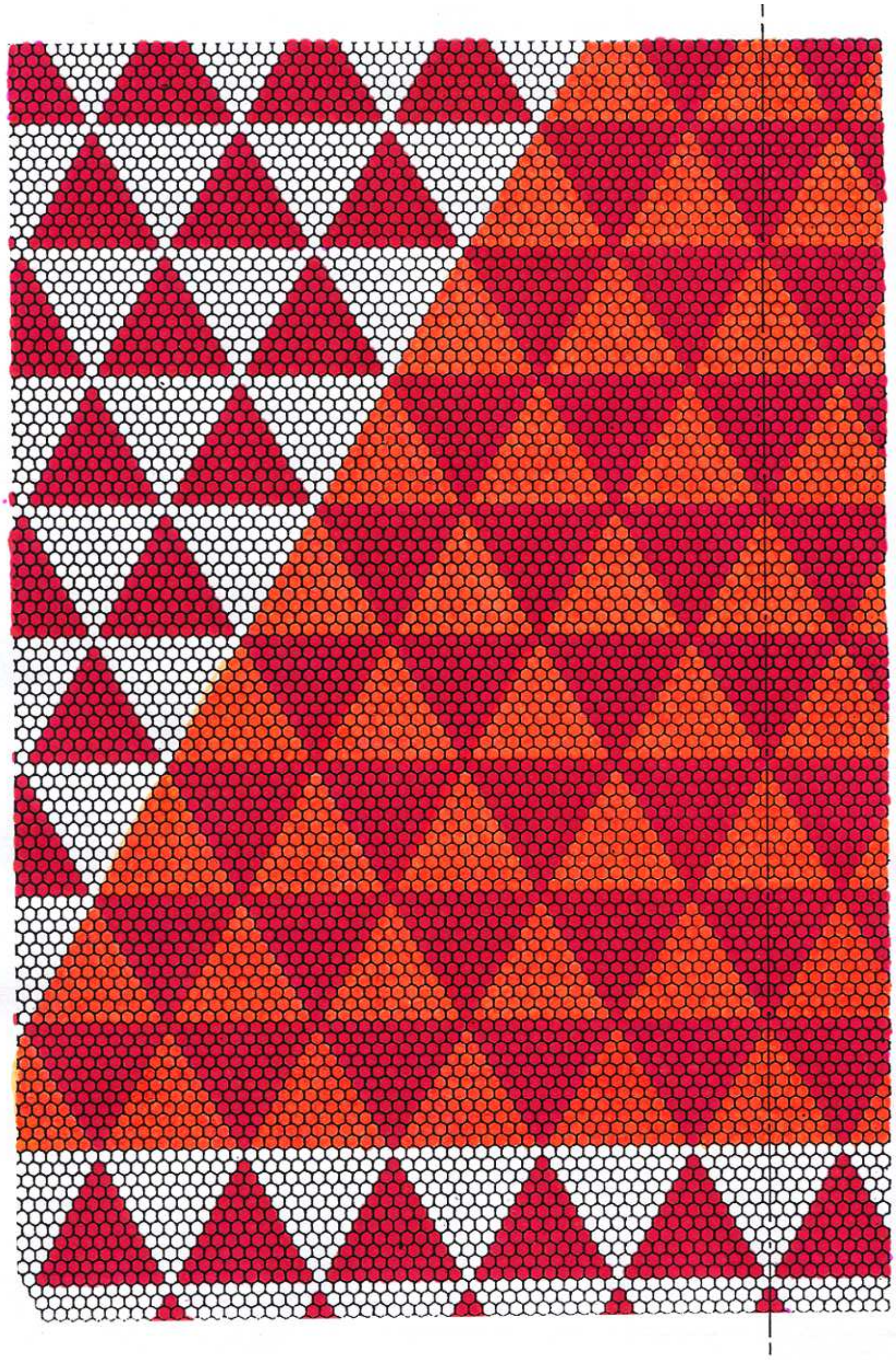


Илл. 8. Организация простого субэлемента-делителя 17 в пределах $n = 0 \div 77$. До появления вторых цветовых модулей здесь также ещё далеко. Они вступят в игру только со строки $n = 17^2 = 289.$



Илл. 9. Организация простого субэлемента-делителя 11 в пределах *n = 0 ÷ 77*. (Простые субэлементы-делители 19 и 13 мы пропустили, т. к. в их организации в этих пределах всё совершенно аналогично.) Вторые цветовые модули появятся уже довольно скоро – со строки $n = 11^2 = 121$.

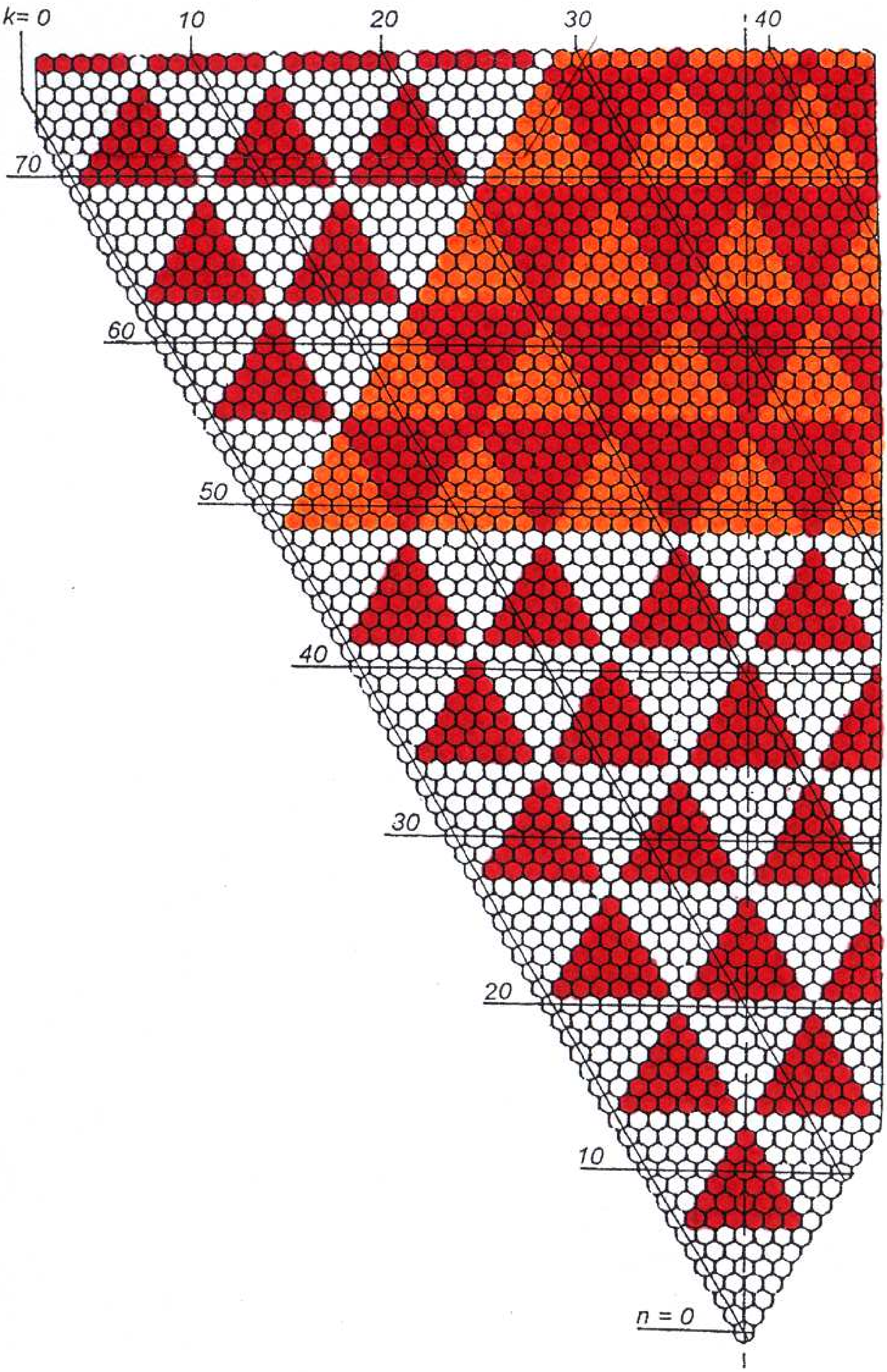
Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11[00] – до 18[00])
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru



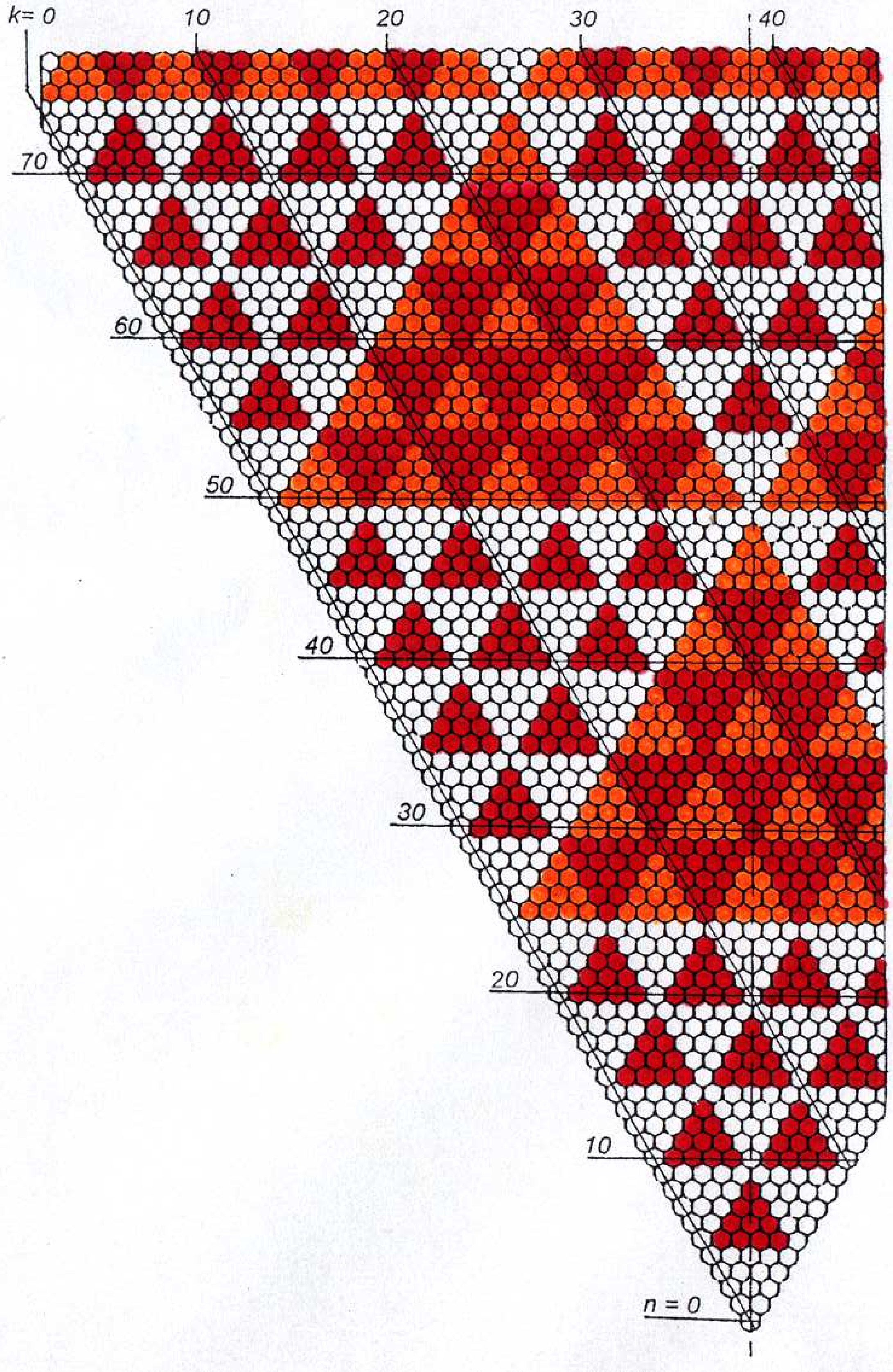
Илл. 10. Организация простого субэлемента-делителя 11 выше строки *n = 107.* Со строки $n = 11^2 = 121$ сплошь закрашенная треугольная фигура уже становится составленной из первого цветового модуля (ячейки оранжевого цвета, соответствующие присутствию простого субэлемента 11^2) и второго цветового модуля (ячейки красного цвета, соответствующие присутствию простого субэлемента 11^1). Второй цветовой модуль также представляет собой равносторонний треугольник из ячеек. Он ориентирован вершиной вниз. Количество ячеек в его сторонах равно 11.

По мере приближения к простым субэлементам-делителям 3 и 2 величины и цвета́ первого и второго цветовых модулей будут меняться. Для наименьшего простого субэлемента 2 первый цветовой модуль становится единственной закрашенной ячейкой, а второй – наименьшим равносторонним треугольником с двумя ячейками в стороне. Для всех простых субэлементов базовыми являются только два этих однотипных цветовых модуля. Более сложные цветовые структуры составляются из них в ключе фрактального самоподобия.

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11^{00} – до 18^{00})
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

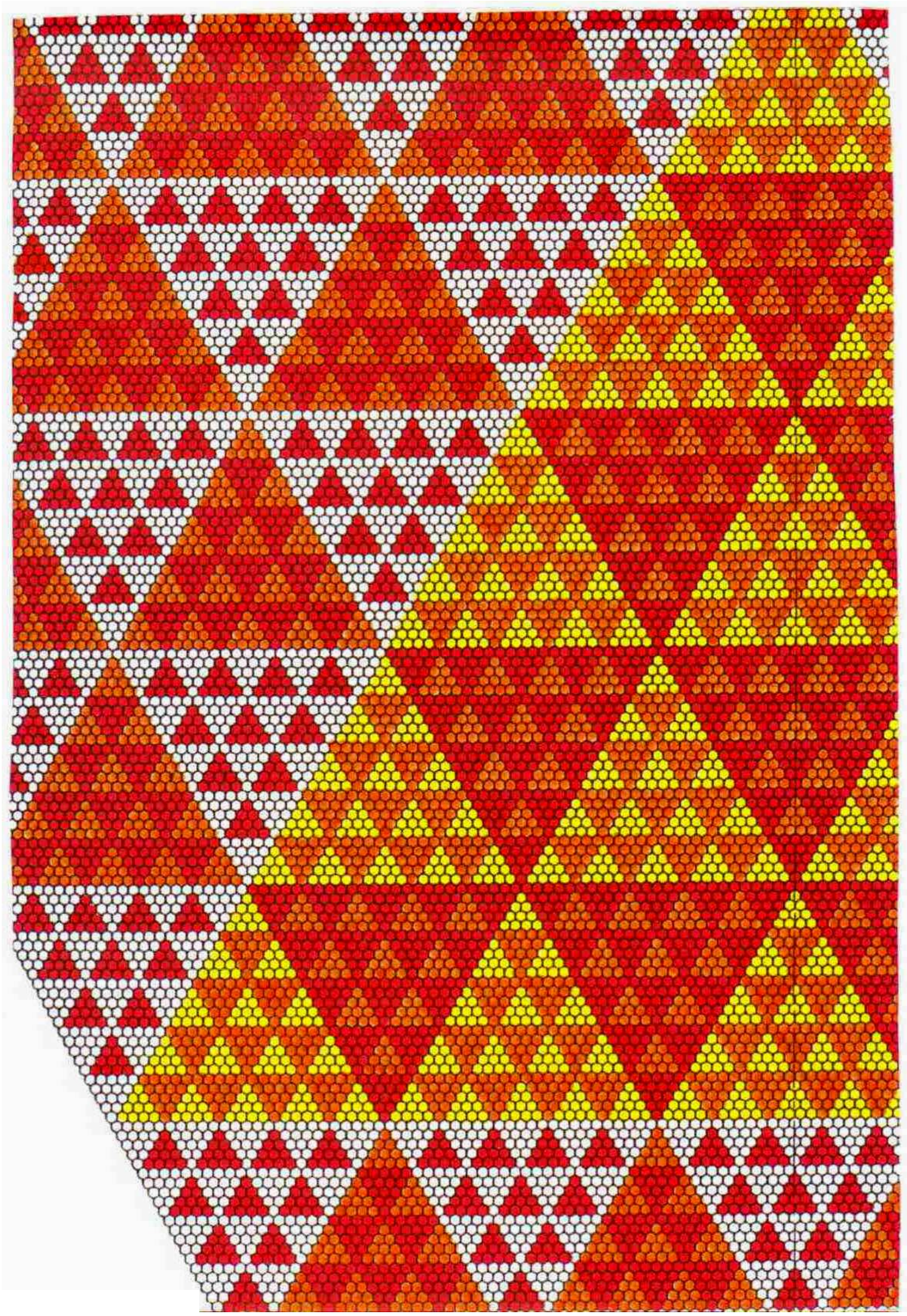


Илл. 11. Организация простого субэлемента-делителя 7 в пределах $n = 0 \div 77$. Со строки $n = 7^2 = 49$ появляются вторые цветовые модули (треугольные зоны красного цвета вершинами вниз). Простые субэлементы $7^2 = 49$ образуют первые цветовые модули (треугольные зоны оранжевого цвета вершинами вверх).



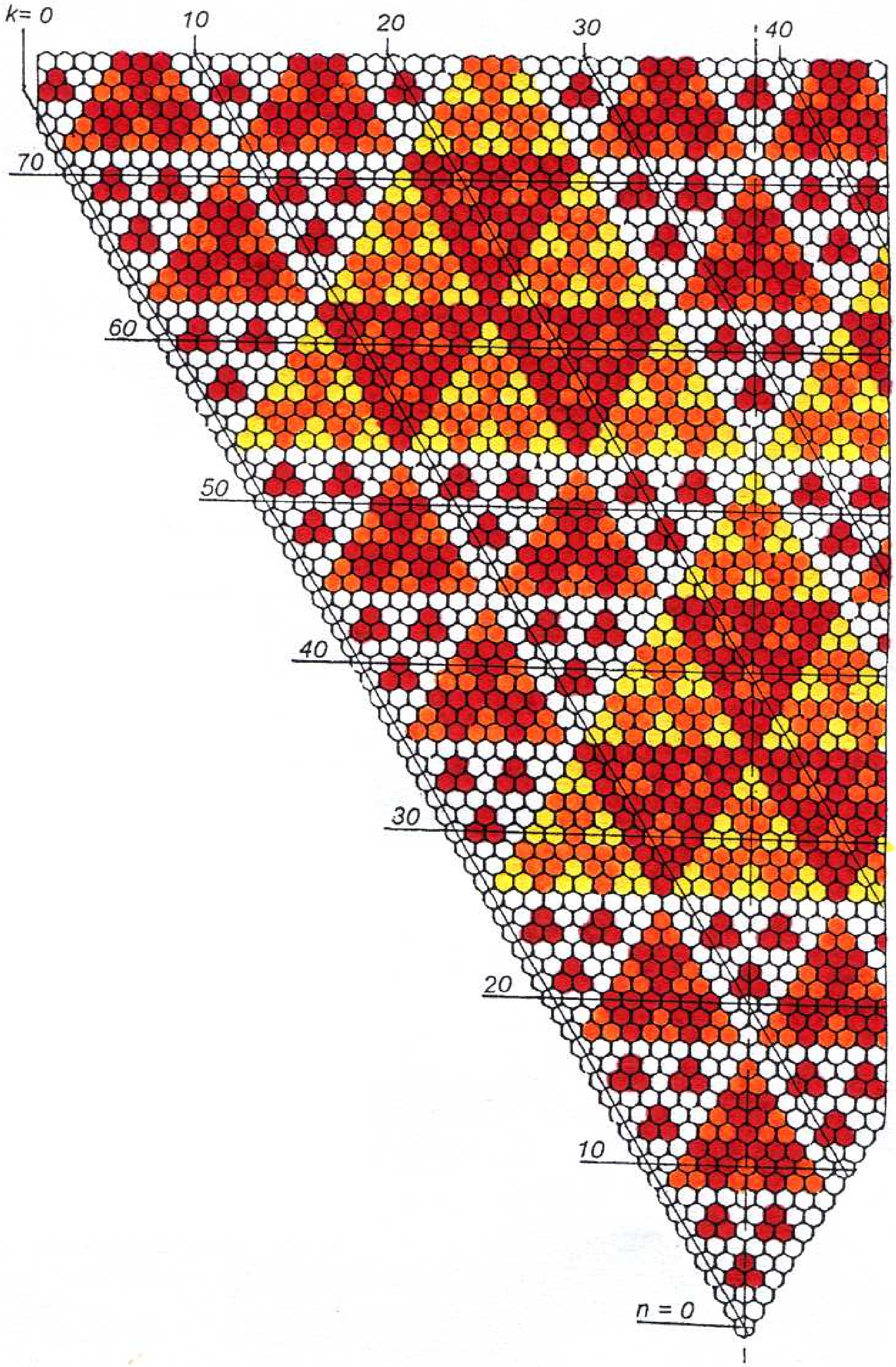
Илл. 12. Организация простого субэлемента-делителя 5 в пределах $n = 0 \div 77$. Со строки $n = 5^2 = 25$ появляются вторые цветовые модули (треугольные зоны красного цвета вершинами вниз). Простые субэлементы 5^2 = 25 образуют первые цветовые модули (треугольные зоны оранжевого цвета вершинами вверх).

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11^{00} – до 18^{00})
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

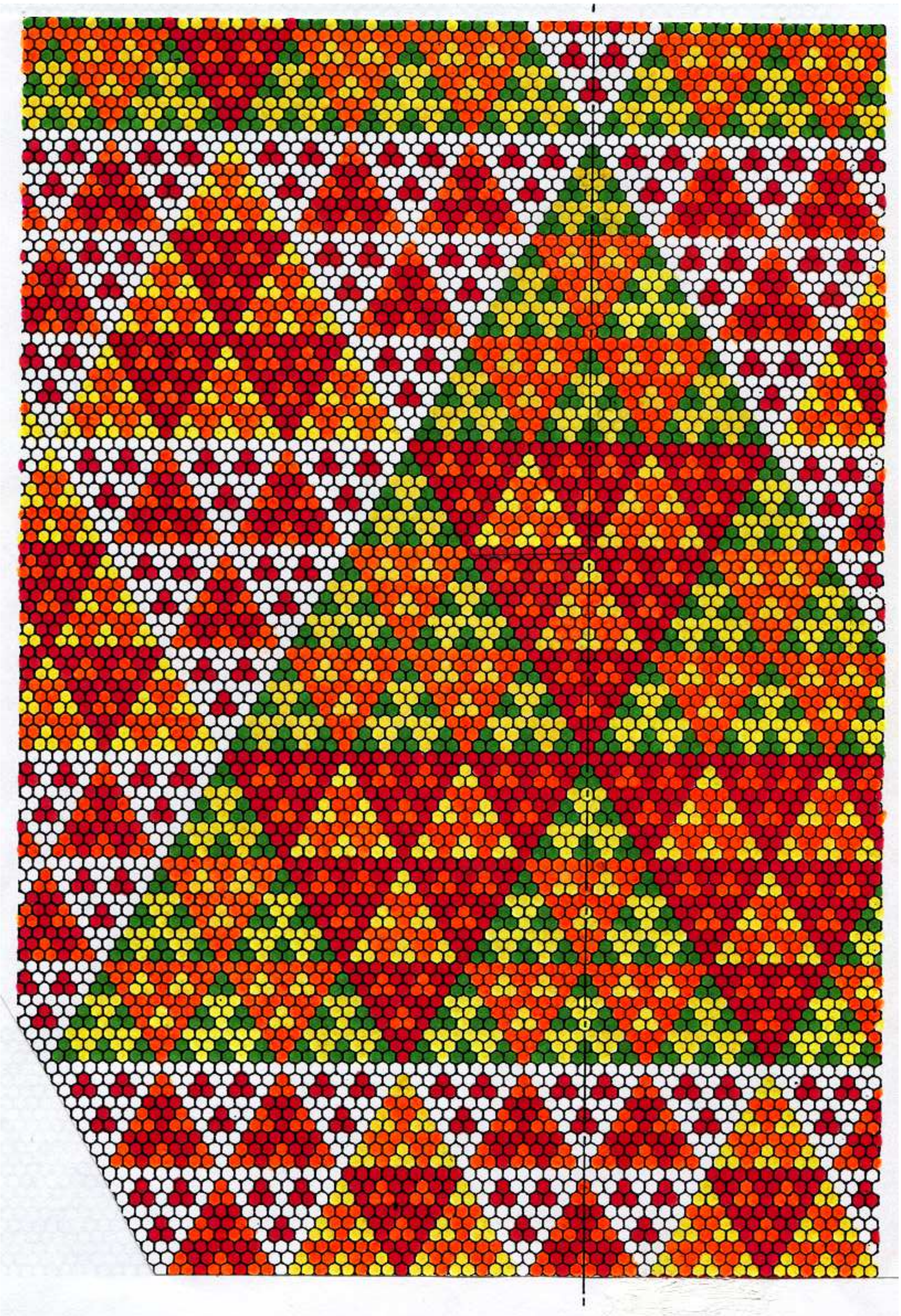


Илл. 13. Организация простого субэлемента-делителя 5 выше строки *n = 105.* Со строки *n* = 5^3 = *125* появляются первые цветовые модули жёлтого цвета. Они соответствуют присутствию простого субэлемента 5^3. Организация простого субэлемента 5^2 выстраивается во второй цветовой модуль ячеек оранжевого цвета. В сплошь закрашенной центральной фигуре ячейки красного цвета, соответствующие присутствию простого субэлемента 5^1, фрактально усложняются по подобию второго цветового модуля. Но, в конечном счёте, всё складывается только из элементарных цветовых модулей – первого и второго.

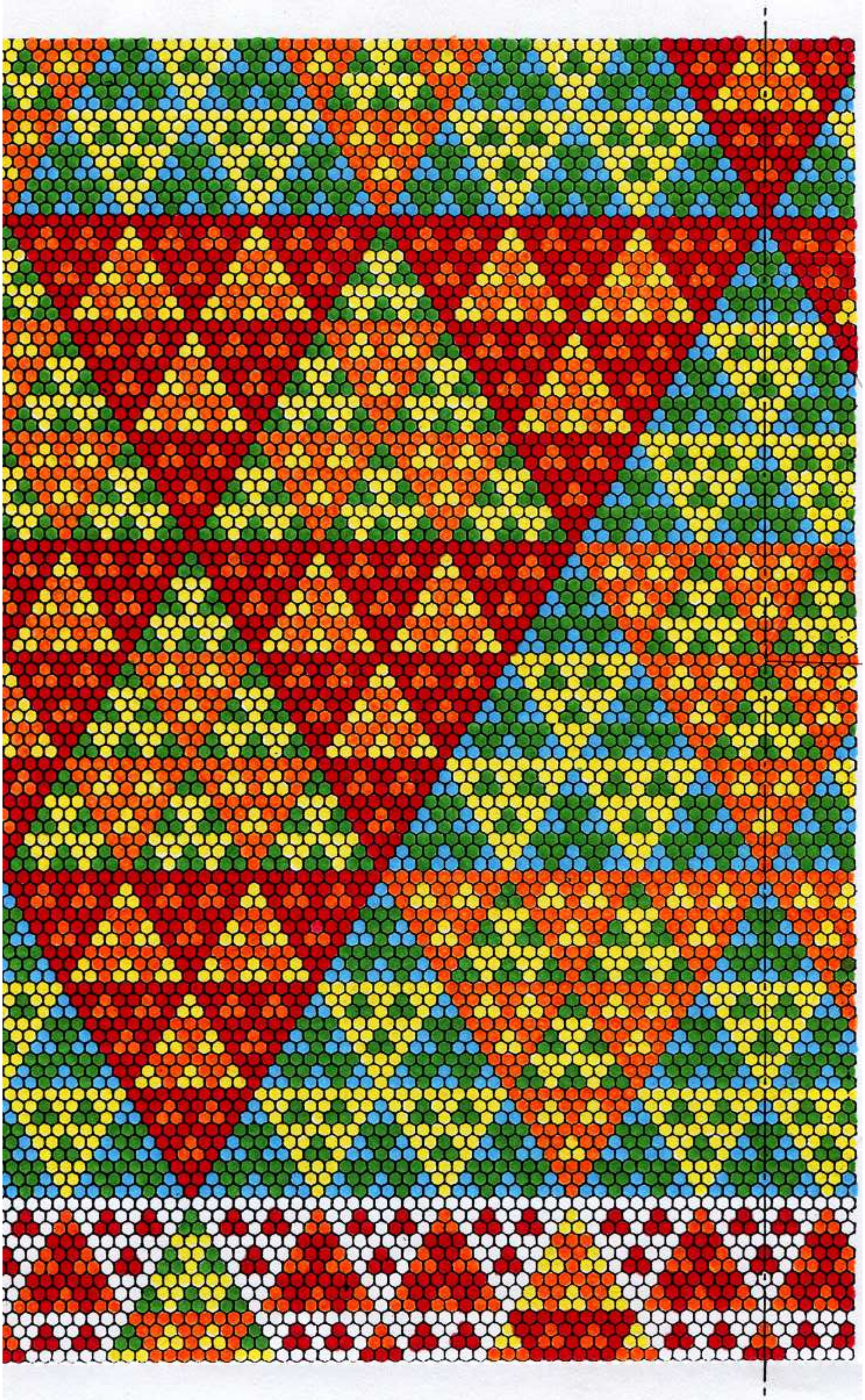
Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11:00 – до 18:00)
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru



Илл. 14. Организация простого субэлемента-делителя 3 в пределах $n = 0 \div 77$. Со строки $n = 3^2 = 9$ появляются ячейки оранжевого цвета, со строки $n = 9^3 = 27$ – жёлтого. Новые степени этого простого субэлемента уже вступают в игру весьма интенсивно и образуют весьма сложную многоцветную фрактальную структуру, которая будет представлена на двух последующих цветографических схемах.



Илл. 15. Организация простого субэлемента-делителя 3 выше строки *n = 63.* Со строки $n = 3^4 = 81$ появляются первые цветовые модули из ячеек зелёного цвета. Жёлтые ячейки при этом образуют вторые цветовые модули. Красные ячейки фрактально усложняются по типу вторых цветовых модулей.



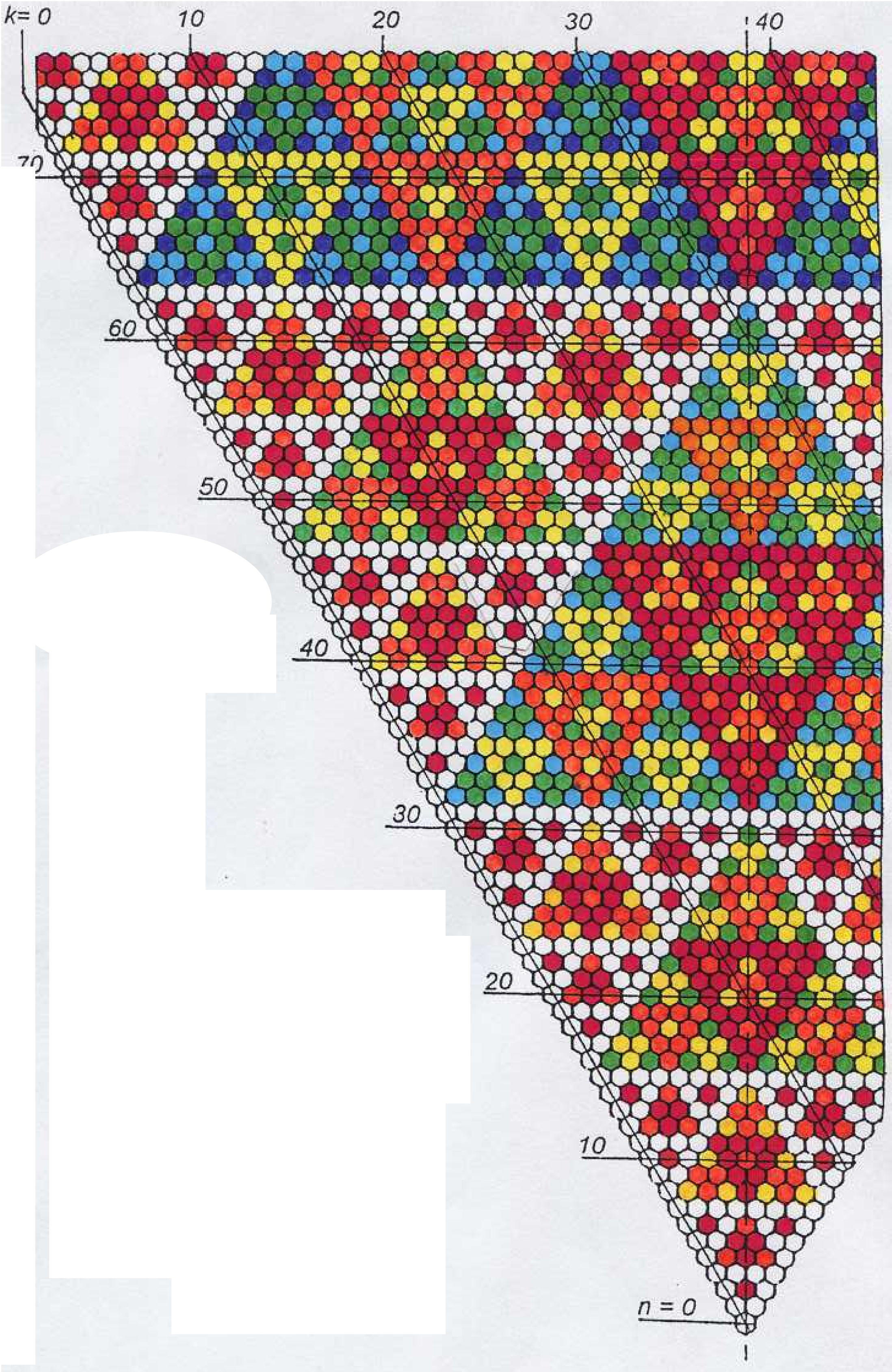
Илл. 16. Организация простого субэлемента-делителя 3 выше строки *n = 230.* Со строки $n = 3^5 = 243$ появляются первые цветовые модули из ячеек голубого цвета. Зелёные ячейки при этом образуют вторые цветовые модули. Оранжевые и красные ячейки фрактально усложняются по типу вторых цветовых модулей.

Особый комментарий к **илл. 17.**

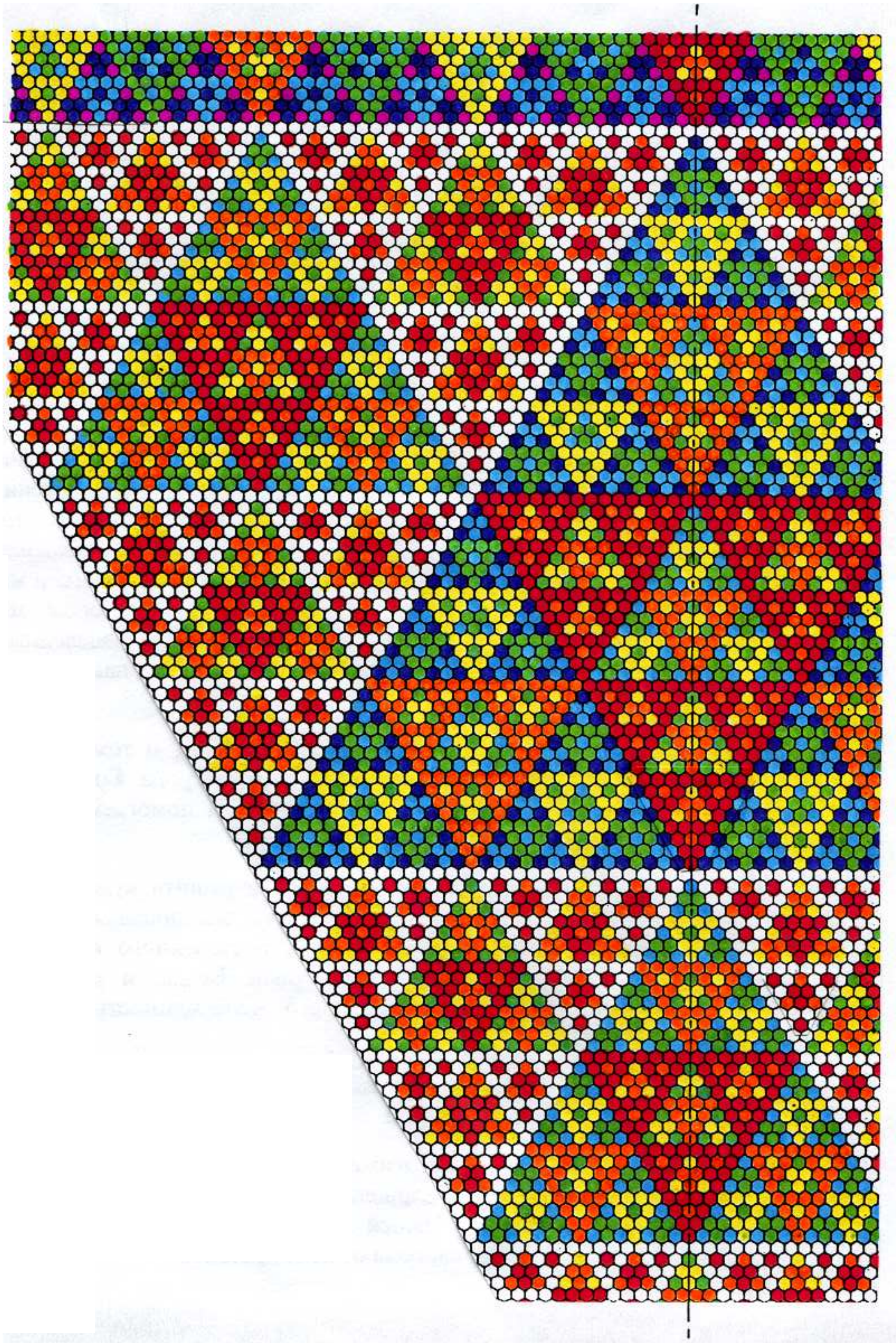
Здесь всё совершенно однотипно, но новые степени этого простого субэлемента и, соответственно, новые цвета вступают в игру наиболее интенсивно. Наибольшая компактность организации наименьшего простого субэлемента-делителя 2 позволяет наглядно понять общий принцип фрактального усложнения цветовых структур, которые, в конечном счёте, складываются из элементарных цветовых модулей – первого и второго.

В каждой центральной сплошь закрашенной зоне имеется сердцевина из ячеек красного цвета. Структура под этой центральной фигурой воспроизводится слева и справа от неё. Это так уже в случае элементарной центральной фигуры на строках $n = 4 \div 6$. После закономерной бесцветной перемычки по всей строке n образуется новая центральная сплошь закрашенная структура с участием нового цвета (соответственно, присутствия на поле чисел треугольника Паскаля простого субэлемента в новой степени). В ней красная сердцевина образуется из красной сердцевины предыдущей центральной сплошь закрашенной фигуры. При этом некрасная «шляпка» над последней окружается слева и справа двумя такими же сплошь закрашенными фигурами с участием красного цвета, которая находится под этой «шляпкой». (Это так уже на строках $n = 0 \div 6$.) Более сложный фрагмент слева и справа от новой сплошь закрашенной центральной фигуры повторяет тот фрагмент, который находится под ней. (Это тоже так уже на строках $n = 0 \div 6$.) И так – во всех случаях, когда после очередной закономерной горизонтальной бесцветной перемычки по всей строке n вступает в игру новый цвет.

Построение очередного большого фрагмента цветографической схемы с участием нескольких цветов следует начинать с красной сердцевины новой сплошь закрашенной центральной фигуры. Затем в неё вписываются внутренние оранжевые зоны, а сверху и по бокам пристраиваются три внешних оранжевых зоны. (Это – для субэлемента 2, а для субэлементов 3, 5, 7 и т. д. количество вписываемых и описываемых зон бо́льшее.) Затем в неё вписываются внутренние жёлтые зоны, а по бокам и сверху приписываются внешние жёлтые зоны. И т. д. После такой прорисовки сплошь закрашенной центральной фигуры слева и справа от неё от простого к сложному прорисовываются те цветографические структуры с бесцветными перемычками, которые находятся под ней.

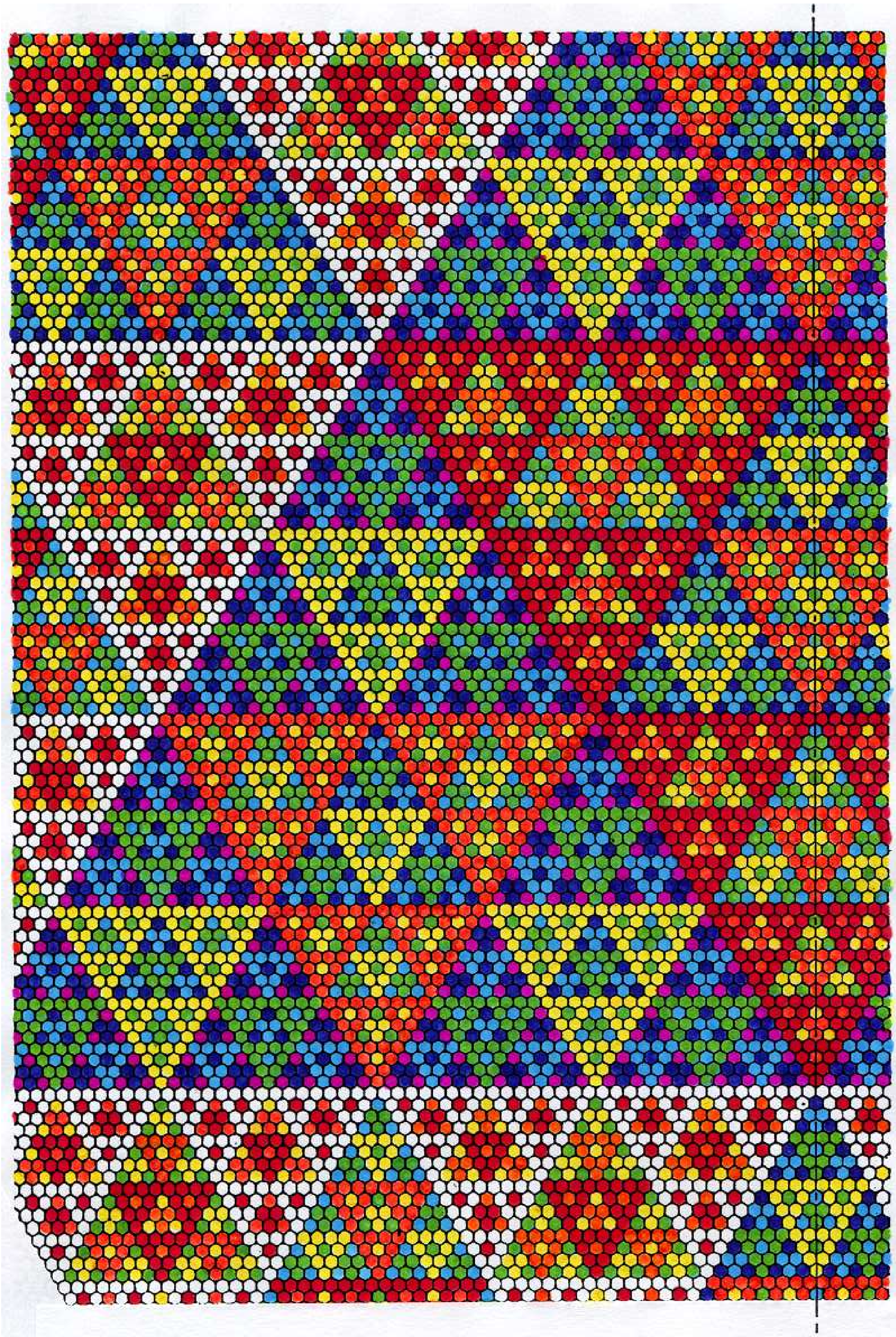


Илл. 17. Организация простого субэлемента-делителя 2 в пределах $n = 0 \div 77$.



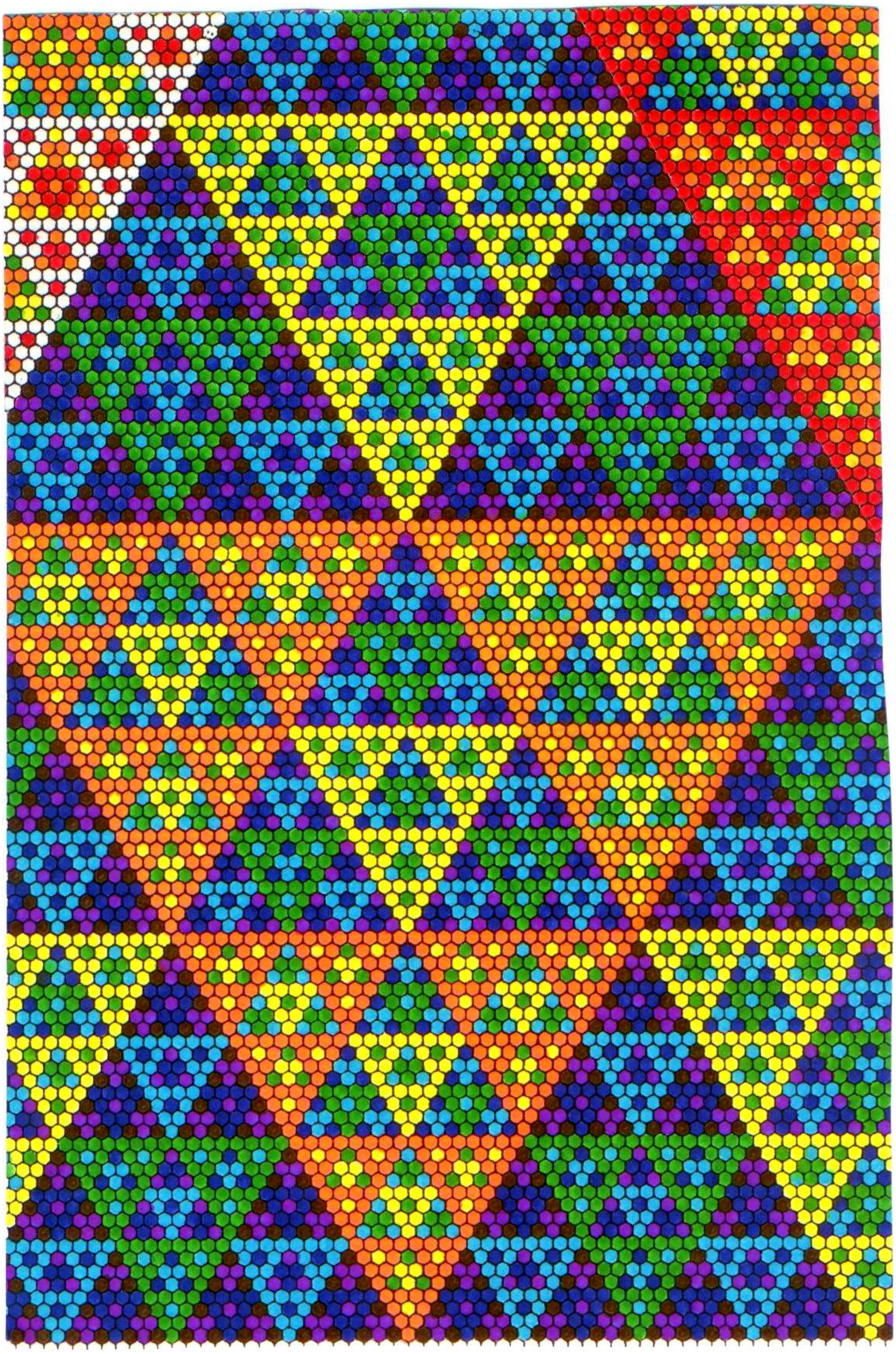
Илл. 18. Организация простого субэлемента-делителя 2 выше строки *n = 59.* Со строки $n = 2^6 = 64$ появляются первые цветовые модули из синих ячеек. В верхней части рисунка со строки $n = 2^7 = 128$ появляются первые цветовые модули из ячеек фиолетового цвета. При этом ячейки синего цвета в сплошь закрашенной центральной фигуре образуют вторые цветовые модули. Ячейки голубого, зелёного, жёлтого, оранжевого и красного цветов фрактально усложняются по типу вторых цветовых модулей.

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11[00] – до 18[00])
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

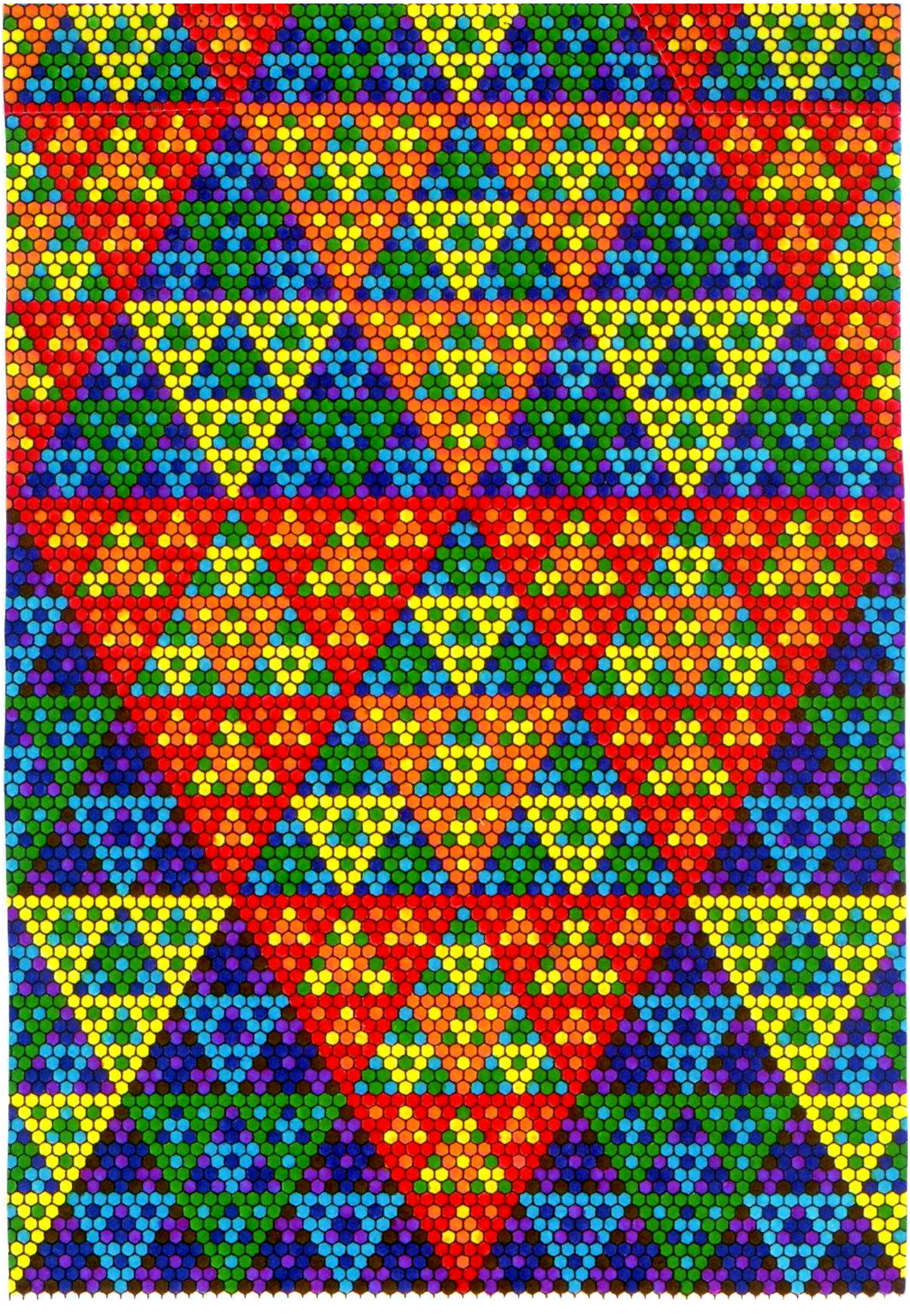


Илл. 19. Организация простого субэлемента-делителя 2 выше строки *n = 110.* Со строки $n = 2^7 = 128$ появляются первые цветовые модули из фиолетовых ячеек. Фрактальность треугольника Паскаля на уровне субэлемента 2 становится в буквальном смысле радужной.

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11^{00} – до 18^{00})
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru



Илл. 20. Организация простого субэлемента-делителя 2 выше строки $n = 2^8 = 256$. На этой цветографической схеме представлена левая часть центральной фигуры из сплошь закрашенных ячеек. Она исчерпывающе информативна ввиду симметричности треугольника Паскаля относительно вертикальной оси. Со строки $n = 2^8 = 256$ появляются первые цветовые модули из коричневых ячеек. Фиолетовые ячейки образуют вторые цветовые модули. Все остальные ячейки образуют фрактально усложняющиеся цветовые структуры. Последние являются наиболее сложными для красной сердцевины этой сплошь закрашенной центральной фигуры, которая представлена на следующей иллюстрации.



Илл. 21. Организация простого субэлемента-делителя 2 выше строки $n = 2^8 = 256$ в сердцевине сплошь закрашенной центральной фигуры. Вертикальная ось симметрии треугольника Паскаля проходит через середину этой цветографической схемы.

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11⁰⁰ – до 18⁰⁰)
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

§ 9. Аналитический расчёт многоцветной гармонии треугольника Паскаля. Стимулирующий парадокс его числовых фракталов

Имея перед глазами треугольник Паскаля, достаточно развитый по закону (39), можно феноменологически констатировать ряд других законов. В частности, можно констатировать такую закономерную взаимосвязь между ближайшими соседями в строке:

$$N_{n,k+1} = N_{n,k} \frac{n-k}{k+1} \qquad (41)$$

Подобные соотношения в математике называются *рекуррентными (возвратными).* Если имеется какая-то математическая последовательность (в частности, числовая), то рекуррентные формулы позволяют вычислять её очередной элемент через ближайшие ранее вычисленные. Именно это и имеет место в случае закона-формулы (41). Но этот закон уже нельзя вывести из закона (39). Для объяснения закона (41) требуется обратиться к одному из основных понятий перечислительной комбинаторики – к понятию числа сочетаний из n элементов по k C_n^k, определяемому формулой (2). С его помощью феноменологически постулируемый закон (39) легко объясняется:

$$C_n^{k+1} = C_n^k \frac{n-k}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{n-k}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)![n-(k+1)]!} = C_n^{k+1} \qquad (42)$$

Оставим теперь на время рекуррентную формулу (41) и обратимся к последовательности натурального ряда чисел, структурируя каждый его член в соответствии с принципом (40):

1, 2^1, 3^1, 2^2, 5^1, $2^1 .3^1$, 7^1, 2^3 , 3^2, $2^1.5^1$, 11^1, $2^2.3^1$, 13^1, $2.^1 7^1$, $3^1 5^1$, 2^4, 17^1, $2^1.3^2$, 19^1, $2^2.5^1$, $3^1.7^1$, $2^1.11^1$, 23^1, $2^3.3^1$, 5^2, $2^1.13^1$, 3^3, $2^2.7^1$, 29^1, $2.^1 3^1.5^1$, 31^1, 2^5, $3^1.11^1$, $2^1.17^1$, $5^1.7^1$, $2^2.3$, 37^1, $2^1.19^1$, $2^3.5^1$, 41^1 и т. д.

Воспользуемся тем же семиотическим приёмом, который позволяет получить компактную картину организации простого субэлементов 3 и 2 в треугольнике Паскаля на схеме 3. Во-первых, для каждого простого субэлемента чисел натурального ряда дадим свою индивидуальную схему. Во-вторых, отсутствие этого субэлемента обозначим точкой, а присутствие – показателем степени, в которой он представлен. В результате получим достаточно развитые компактные схемы, позволяющие усмотреть специфические фракталоподобные закономерности:

Для субэлемента 2: **.1.2.1.3.1.2.1.4.1.2.1.3.1.2.1.5.1.2.1.3.1.2.1.4.1.2.1.3.1.2.1.6.2.** ...
Для субэлемента 3: **..1..1..2..1..1..2..1..1..3..1..1..2..1..1..2..1..1..3..1..1..2..1..1..2…1** ...
Для субэлемента 5: **....1....1....1....1....2....1....1....1....1....2….1….1….1….1….2….1.** ...
Для субэлемента 7: **……1……1……1……1……1……1……2……1……1……1……1** …

Наличие этих закономерностей легко доказывается методом полной математической

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11[00] – до 18[00])
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

индукции, поскольку здесь мы имеем дело со свойствами натурального ряда чисел как простейшей арифметической прогрессии с разностью 1.

Проделаем теперь для конкретного примера расчёт элементов строки $n = 8$ в треугольнике Паскаля по формуле (42), структурируя при этом все используемые и получающиеся числа в соответствии с принципом (40):

$$C_8^0 = 1 \to C_8^1 = 1\frac{2^3}{1} = 2^3 \to C_8^2 = 2^3\frac{7}{2} = 2^2.7 \to$$

$$\to C_8^3 = 2^2.7\frac{2.3}{3} = 2^3.7 \to C_8^4 = 2^3.7\frac{5}{2^2} = 2^1.5.7 \to$$

$$\to C_8^5 = 2^1.5.7\frac{2^2}{5} = 2^3.7 \to C_8^6 = 2^3.7\frac{3}{2.3} = 2^2.7 \to$$

$$\to C_8^7 = 2^2.7\frac{2}{7} = 2^3 \to C_8^8 = 2^3\frac{1}{2^3} = 1\,.$$

Присмотревшись к этой цепочке рекуррентных вычислений, легко заметить, что если нас интересует поведение простого субэлемента 2, то можно проследить только за ним, ибо оно независимо от поведения простых субэлементов 3, 5 и 7. В силу этой же независимости можно проследить отдельно за поведением каждого простого субэлемента. Поскольку же вычисления по правилу (39)+(40) в любом случае начинаются с единицы, важно лишь то, ка́к простые субэлементы ведут себя в числителе и в знаменателе дроби *n – k / k + 1*. Остановим своё внимание на простом субэлементе 2, воспользовавшись символикой точек (соответствующих его отсутствию) и цифр (соответствующих показателям степеней, в которых он присутствует):

n – k	.	3	.	1	.	2	.	1	.
k + 1		.	1	.	2	.	1	.	3
	.	3	2	3	1	3	2	3	.

Как видим, в числителе и в знаменателе простой субэлемент 2 ведёт себя точно так же, как в системе натурального ряда. (Аналогично и независимое поведение других простых субэлементов.) Разница лишь в том, что в знаменателе представительство простого субэлемента 2 соответствует натуральному ряду, развиваемому слева направо, а в числителе – развиваемому справа налево.

Теперь легко проделать рекуррентное вычисление представительства простого субэлемента 2 в 8-й строке треугольника Паскаля. Поскольку эта строка, как и любая другая, начинается с левой единицы, сперва ставим точку. В нижнем ряду, который соответствует знаменателю *k+1*, при этом надо предусмотреть дополнительную, пустую клетку, под которой всегда ставится точка, соответствующая тому, что в крайних столбцах из единиц субэлемента 2 нет и не бывает. Отправляясь от этой точки в духе рекуррентного вычисления следующего элемента числовой системы через предыдущий, следом за этой исходной точкой ставим цифру 3 из числителя. Отправляясь от этой тройки, следом за ней ставим цифру 3 – 1 = 2. Отправляясь от полученной двойки, следом за ней ставим цифру 3 – 2 = 1 и т. д. Последним актом вычисления будет 3 – 3 = **.** , то есть, число 1 крайнего правого столбца.

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11[00] – до 18[00])
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

Таким образом, элементарно просчитано представительство простого субэлемента на строке $n = 8$.

Точно так же можно просчитать все остальные строки для субэлемента 2 и вообще для любого другого простого субэлемента. Делается это элементарно и вовсе не требует обращения за помощью к компьютеру, по крайней мере, до уровней n = 100–150. Надо лишь сделать эту схему подвижной, вариабельной.

Для этого следует взять две полосы плотной бумаги или картона. Можно взять две полосы из более жёсткого материала (фанера, оргстекло), наклеив на них бумажные полосы. Далее бумажные полосы следует разметить на одинаковые клетки. На одну полосу слева направо наносим представительство простого субэлемента в символике точек и цифр, соответствующих показателям степеней. Это будет нижний движок специфической ***счётной линейки.*** На нём крайняя левая клетка пустая, и под ней всегда ставится точка, соответствующая левым единицам строк треугольника Паскаля. При рекуррентном вычислении цифры с нижнего движка всегда берутся со знаком минус, поскольку он соответствует знаменателю дроби $n - k / k + 1$, а в знаменателях показатели степеней отрицательные. В клетки другой полосы, которая будет верхним движком счётной линейки, справа налево и без дополнительной пустой клетки наносится та же информация. При вычислениях цифры с верхнего движка берутся со знаком плюс, так как он соответствует числителю вышеупомянутой дроби.

Зоны перекрытия двух движков теперь можно менять, и каждая зона перекрытия движков будет соответствовать той или иной строке треугольника Паскаля. Так как в треугольнике Паскаля количество чисел в строке n всегда на единицу больше номера строки, то по зонам перекрытия движков всегда легко определить, с какой строкой n мы имеем дело. В каждом случае под зоной перекрытия движков по цепочке непрерывного алгебраического Суммирования цифр можно рассчитать представительство того или иного простого субэлемента на той или иной строке. Последняя цифра с нижнего движка в зоне перекрытия при этом в любом случае будет аннулировать результаты рекуррентного алгебраического суммирования цифр, давая крайнюю правую единицу строки треугольника Паскаля. В принятой символике – крайнюю правую точку.

Таким образом, понятие C_n^k вместе с принципами (40) и (41) даёт эффективный формализм расчёта представительства простых субэлементов-делителей в структурном фундаменте треугольника Паскаля. Этот формализм позволяет рассчитать (стало быть, объяснить) всю многоцветную фрактальную гармонию треугольника Паскаля, которая в рамках феноменологического подхода может лишь констатироваться или полуинтуитивно угадываться на основе соображений симметрии.

На **илл. 15** представлены четыре последовательных шага расчёта представительства простых субэлементов 3 и 2 на строках n = 13, 14, 15 и 16. Этот формализм можно назвать ***методом счётной линейки.***

Этот метод осуществляет ***специфическую развёртку на плоскости симметричных фракталоподобных субструктур одномерной числовой системы натурального ряда.*** Но этот метод справедлив ***только для простых*** субэлементов-делителей. В случае составных субэлементов-делителей он даёт ложные результаты. Иначе говоря, метод счётной линейки ***внутренне противоречив, парадоксален.*** В науке парадоксы такого рода являются особенно сильными стимулами для эвристического поиска и выработки новых понятий, для открытия новых законов. В данном случае треугольник Паскаля поднимает фундаментальные проблемы взаимоотношений упорядоченности и беспорядка, которые находятся в центре внимания синергетики с её теорией динамического (детерминистского) хаоса.

Стимулирующая парадоксальность метода счётной линейки заключается в следующем. В системе натурального ряда совершенно аналогичная фракталоподобная симметричность при-

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11⁰⁰ – до 18⁰⁰)
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

суща и расположению составных субэлементов-делителей. Например:

Для субэлемента 4 = 2.2: **…1…1…1…2…1…1…1…2…1…1…1…2…1…1…1…3…** …
Для субэлемента 6 = 2.3: **…..1…..1…..1…..1…..1…..2…..1…..1…..1…..1…..1…..2..** …

Если переложить фракталоподобную симметрию организации субэлемента 4 на метод счётной линейки, то получится цветографическая схема, промежуточная между схемами для простых субэлементов 3 и 5. (См. **илл. 23**) Вместе с тем, картину организации составного делителя 4 в треугольнике Паскаля легко получить из **илл. 17**. (См. **илл. 24**.) Эта истинная картина разительно отличается от той, которая получена методом счётной линейки, хотя по-прежнему сохраняет свою детерминистскую фрактальность, а также вращательную симметрию 3-го порядка.

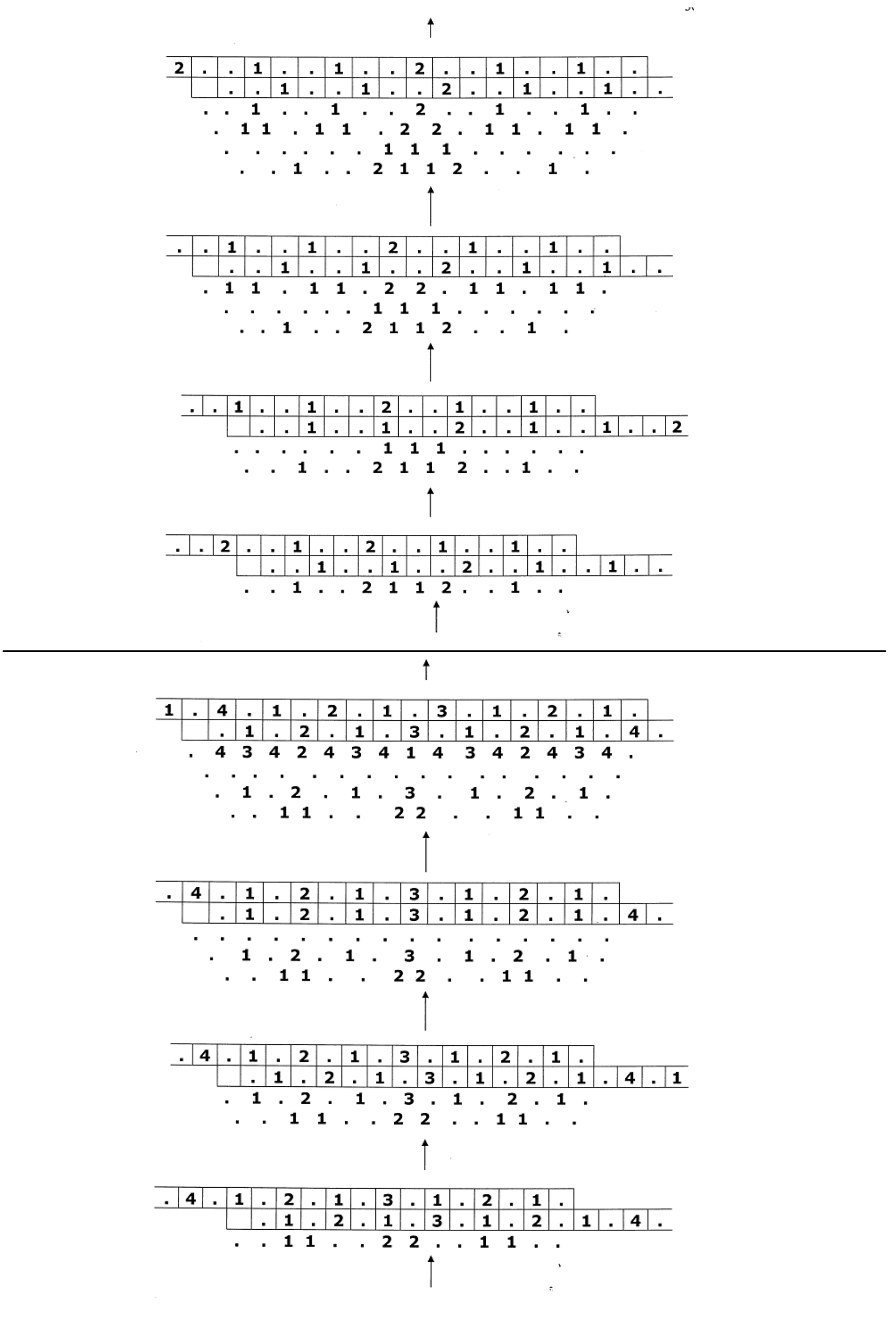
Если на метод счётной линейки переложить фракталоподобную симметричность организации субэлемента 6, то получится цветографическая схема, промежуточная между схемами для простых субэлементов 5 и 7. (См. **илл. 25**.) Вместе с тем, картину организации субэлемента 6 легко получить как пересечение картин организации простых субэлементов 2 (жёлтый цвет) и 3 (голубой цвет) с **илл. 14** и **17**. Смешение этих двух цветов даёт зелёный цвет, который на **илл. 26** затемнён для большей контрастности.

И без внутреннего цветового структурирования результирующих сплошь закрашенных зон очевидно, что реальная организация составного субэлемента 6, образованного перемножением *разных* простых чисел 2 и 3, принципиально отличается от той, которую даёт метод счётной линейки. Во-первых, разрушается вращательная симметрия 3-го порядка и остаётся только «неистребимая» симметричность треугольника Паскаля относительно вертикальной оси. Во-вторых, фрактальность организации этого составного субэлемента на поле чисел $N_{n,k}$ становится существенно неупорядоченной. Благодаря идеальному дальнему порядку и детерминистской фрактальности организации простых субэлементов чисел $N_{n,k}$ по малому фрагменту цветографической схемы можно восстановить её бо́льшие фрагменты. (Теоретически – сколь угодно большие.) В случае составных субэлементов из разных простых делителей фрактальность их организации на поле чисел $N_{n,k}$ перестаёт быть детерминистской и такое восстановление становится невозможным.

Этот феномен непосредственно связан с темой случайности в арифметике, по-пулярно освещённой в статье Г. Чейтина [34], которая была опубликовна в журнале «В мире науки» ровно за год до моей статьи [1]. Там было показано, что эта проблематика выходит непосредственно на теорию Диофантовых уравнений и, следовательно, на Великую теорему Ферма. Вместе с тем, эта проблематика была прямо связана и с организацией простых субэлементов в треугольнике Паскаля, но при этом не учитывались показатели степеней их представительства в числах $N_{n,k}$.

Фрактальные числовые субструктуры треугольника Паскаля, образуемые его простыми делителями, позволяют точно вычислять числа C_n^k при бо́льших значениях *n*. Во множестве задач физической и химической кинетики, теории информации и др. возникает необходимость систематически оперировать такими величинами C_n^k. В таких случаях традиционно обращаются к приближённой формуле Стирлинга для вычисления факториалов, фигурирующих в формуле для числа сочетаний:

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11^{00} – до 18^{00})
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru



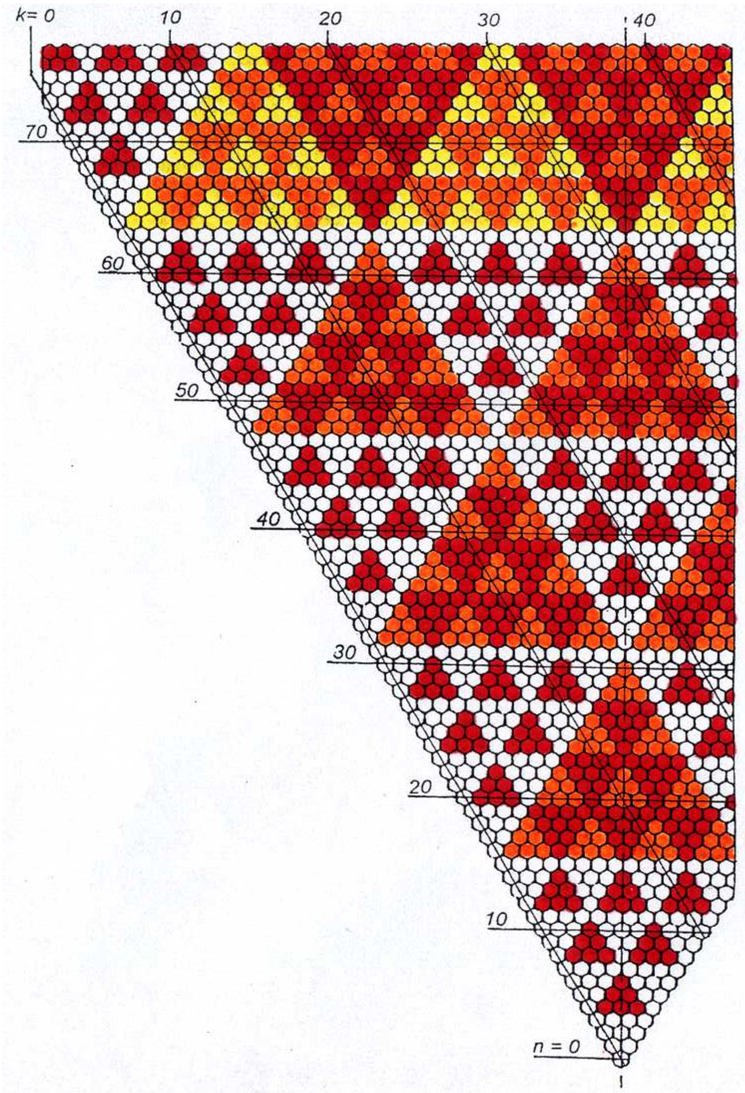
Илл. 22 Демонстрация работы рекуррентного расчётного формализма для субэлементов-делителей 3 (сверху) и 2 (снизу). Обращаю особое внимание читателей на то, как элементарно для субэлемента 2 (и для всех остальных) объясняется эффект бесцветной перемычки, который на уровне n = 15 цвет-ографический формализм может лишь феноменологически постулировать как нечто закономерное, но необъяснимое.

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11⁰⁰ – до 18⁰⁰)
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

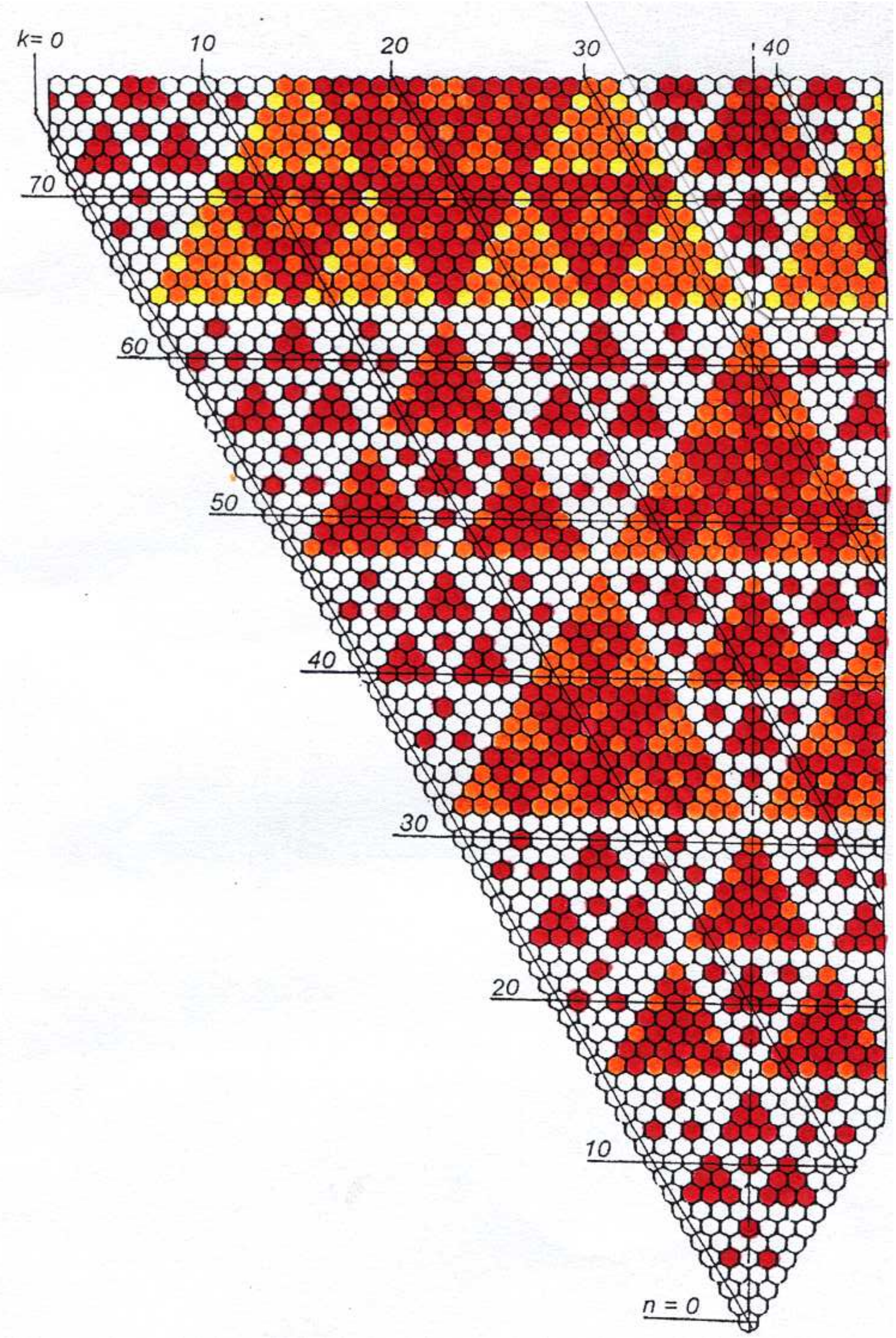
$$n! \sim \sqrt{2.\pi.n.n^n.e^{-n}}\ ,$$

где π = 3,1459…, e = 2,7183… .

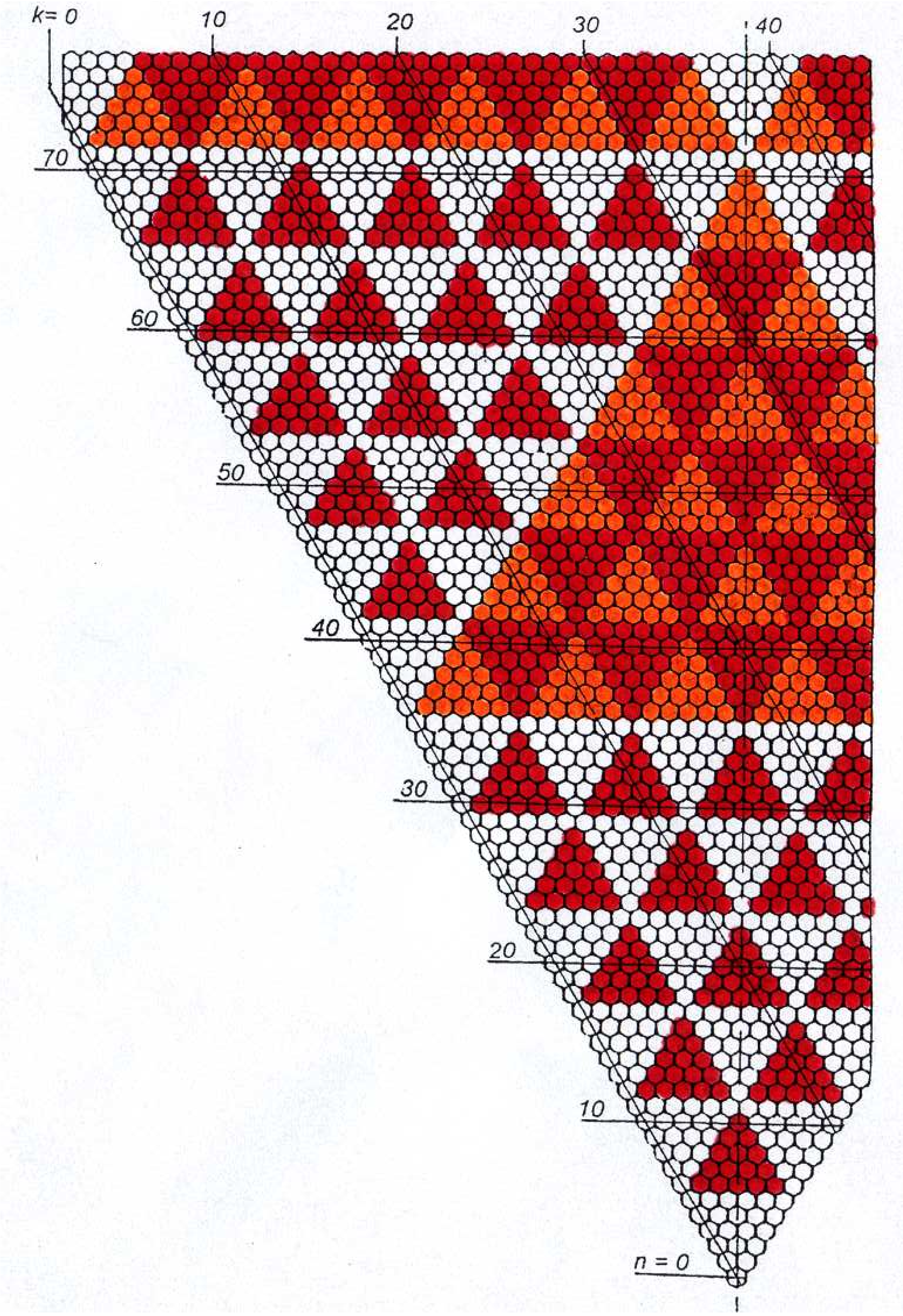
Субструктуры треугольника Паскаля, образуемые его простыми делителями, позволяют оперировать точными значениями C_n^k, представленными в форме канонического произведения простых делителей в своих степенях. В такой форме больши́е C_n^k можно ставить в дробно-рациональные выражения и после «опустошительных» сокращений простых делителей получать точные результаты там, где традиционно довольствуются приближёнными результатами. Фрактальные субструктуры треугольника Паскаля могут быть затабулированы, воплощены в новых компьютерных программах и т. п. ***В общем, треугольник Паскаля теперь позволяет не просто вычислять значения*** C_n^k***, но и вычислять их с любой точностью.***



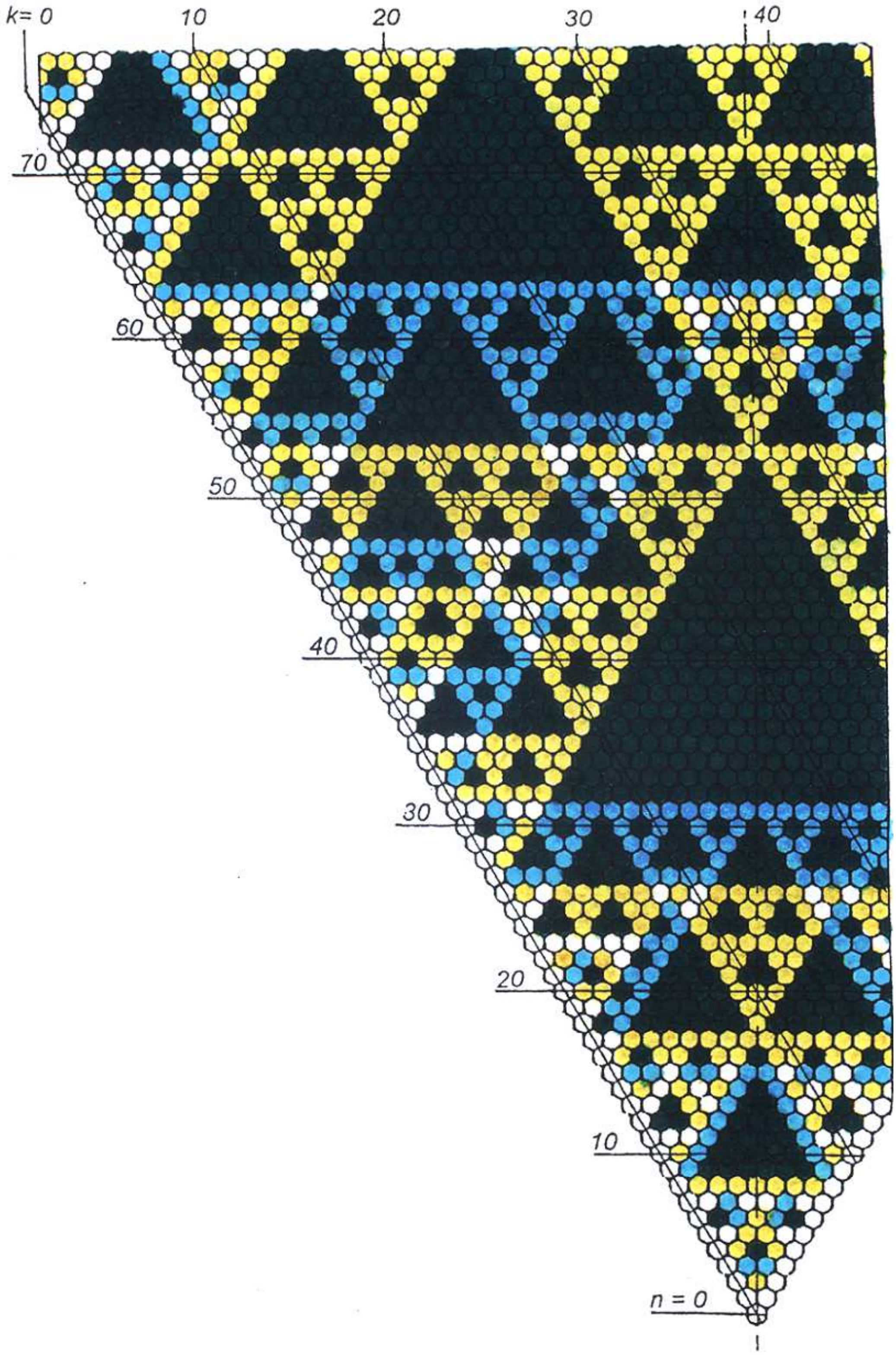
Илл. 23. Ложная версия организации составного субэлемента-делителя $2^2 = 4$ в пределах $n = 0 \div 77$, полученная методом счётной линейки.



Илл. 24. Истинная версия организации составного субэлемента-делителя $2^2 = 4$ в пределах $n = 0 \div 77$, полученная из цветографической схемы на **илл. 17.** На этой цветографической схеме сохраняется идеальная вращательная симметрия 3-го порядка. Как и в случае простых субэлементов, более сложные степенны́е структуры появляются со строк с соответствующими номерами: $16 = 4^2$ – со строки $n = 16 = 4^2$, $64 = 4^3$ – со строки $n = 64 = 4^3$. Цветовые фрактальные структуры имеют однозначный алгоритм поступательного усложнения. Иначе говоря, эти фракталы остаются детерминистскими.



Илл. 25. Ложная версия организации составного субэлемента-делителя 2.3 = 6 в пределах $n = 0 \div 77$, полученная методом счётной линейки.



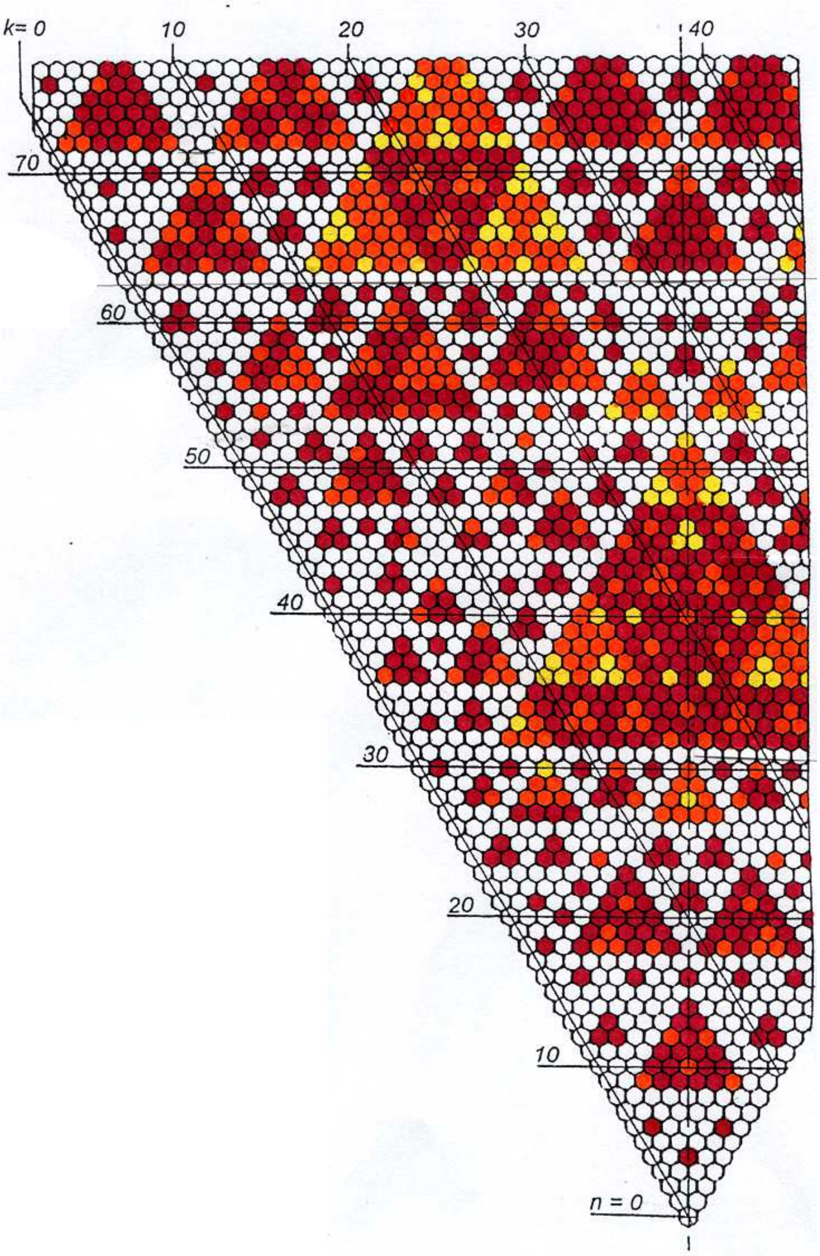
Илл. 26. Истинная версия организации составного субэлемента-делителя 2.3 = 6 в пределах *n = 0 ÷ 77* без учёта показателей степеней. Она получена методом смешения цветов схем организации простых субэлементов 3 (ячейки голубого цвета) и 2 (ячейки жёлтого цвета). Зоны смешения этих двух цветов дают ячейки зелёного цвета, соответствующие присутствию составного субэлемента 6. Для бо́льшего контраста эти зоны закрашены тёмно-зелёным цветом.

Особый комментарий к **илл. 27** и **28**

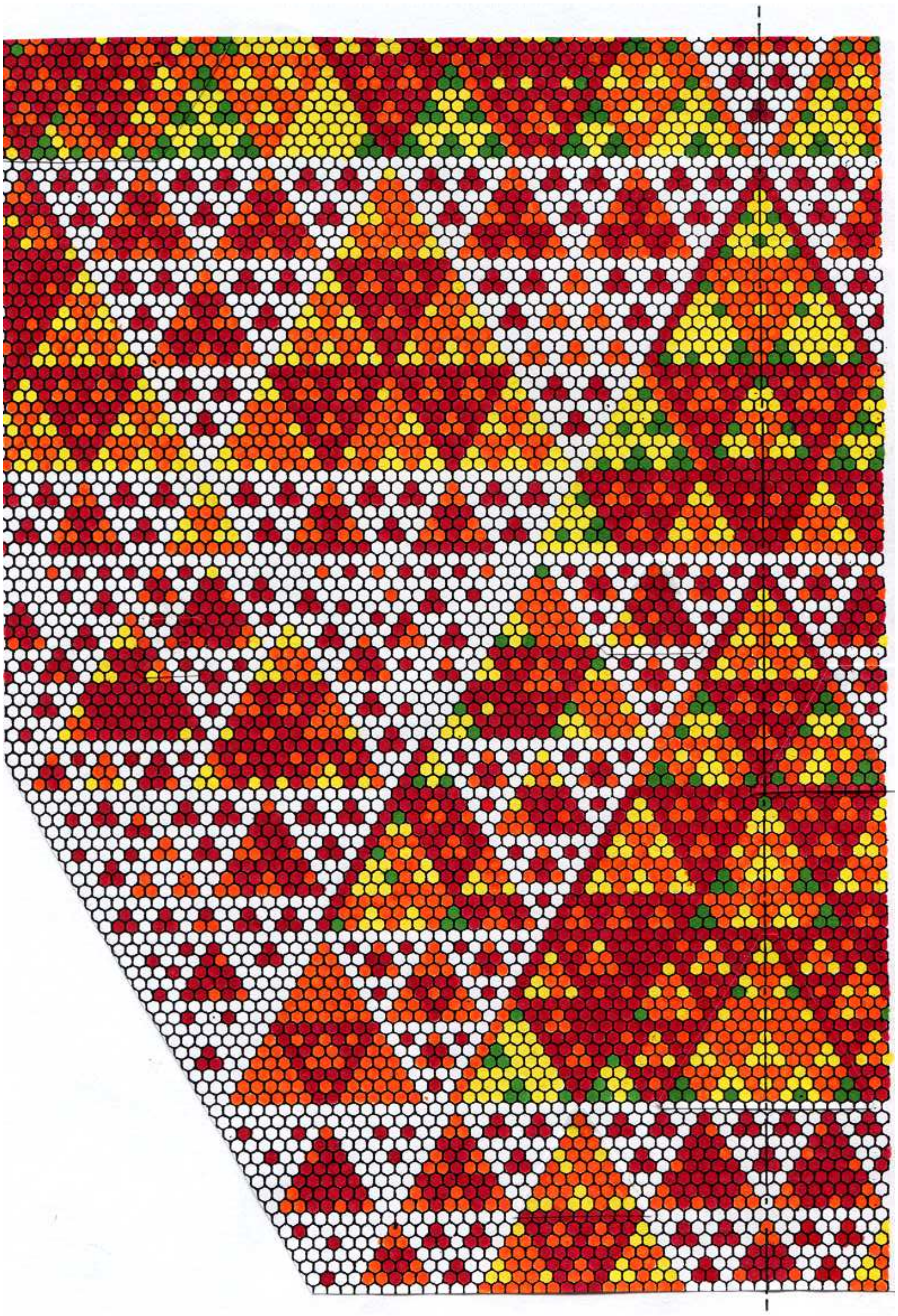
Цветографический анализ организации в треугольнике Паскаля составных субэлементов, получаемых от перемножения разных простых делителей, легко осуществить с помощью двух цветов, которые при смешении дают новый цвет. На **илл. 26** жёлтым цветом обозначены числа, содержащие простой субэлемент 2, а голубым – числа, содержащие простой субэлемент 3. Зоны смешанного зелёного цвета, который затемнён для бо́льшей контрастности, сразу же показывают организацию составного субэлемента 6.

Для цветографического анализа организации субэлемента 6 по степеням надо изготовить несколько одинаковых ксерокопий системы геометрических ячеек. На одной из них с **илл. 14** и **17** жёлтым и голубым цветом прорисовывается, например, организация субэлементов 3^3 и 2^3. Затем зелёные зоны смешения двух цветов закрашиваются чёрным фломастером. Затем на этот лист накладывается другой, основной лист с геометрическими ячейками и на нём на просвет жёлтым фломастером закрашиваются эти чёрные ячейки. Затем то же повторяется для субэлементов 3^2 и 2^2, 3 и 2. В итоге на верхнем, основном листе образуется цветографическая схема организации субэлемента 6 с учётом его степеней.

В наше время эту работу можно возложить на компьютер. Однако работа над формированием подобных цветографических схем вручную позволяет воочию увидеть хаотизацию поведения на поле чисел треугольника Паскаля составных субэлементов, образуемых перемножением *разных* простых делителей.



Илл. 27. Истинная версия организации составного субэлемента-делителя 2.3 = 6 в пределах *n = 0 ÷ 77* с учётом показателей степеней, в которых он представлен в числах $N_{n,k}$. Её легко получить как результат пересечения цветографических структур с **илл. 14** и **17**. Метод счётной линейки при расчёте этих субструктур продолжает исправно работать, но он даёт принципиально ложные результаты. Реально дело обстоит так, что разрушается вращательная симметрия 3-го порядка как сплошь закрашенных цветовых структур, так и их цветовой «начинки». Составной субэлемент 6 впервые появляется на строке *n* = 4, т. е. ниже, чем в областях присутствия простых субэлементов. То же относится и к степеням составного субэлемента 6. Нижняя граница его появления в степенях определяется нижней границей появления простого делителя 3 и его степеней. А главное – то, что у цветографических структур нет чёткого алгоритма построения. Ни малые, ни большие фрагменты цветографической схемы не дают никаких надёжных оснований для того, чтобы её наращивать далее. На поле чисел треугольника Паскаля вместо идеального дальнего порядка воцаряется непредсказуемая перемежаемость больших и малых цветовых блоков для простых субэлементов 2 и 3.



Илл. 28. Истинная цветографическая картина организации составного субэлемента 6 = 2.3 выше строки *n* = 65.

В этом параграфе мне остаётся только ещё раз подчеркнуть, что фрактальные субструктуры треугольника Паскаля веками «лежали на поверхности» вплоть до 1980 г. Для их открытия всего-то и надо было лишь мало-мальски развернуть треугольник Паскаля со структурированными числами $N_{n,k}$ и перейти на компактную знаковую форму их отражения. Поразительным историко-научным фактом является то, что за многие века никто из математиков не додумался до столь элементарного, примитивного эвристического хода мышления. Великолепный и в высшей степени методологически поучительный пример того, как классическая парадигма «одномерного» математически доказательного дискурса в словах, понятиях, формулах и логических умозаключениях веками не позволяла видеть математическое сокровище, лежавшее на у всех на виду.

§ 10. Треугольник Паскаля как многоуровнево-иерархичная числовая система.

Тема существенно разных теоретических описаний одного объекта весьма популярна в современной логике и методологии науки. ***Возможность таких описаний непосредственно определяется многоуровнево-иерархичной структурой самих объектов научно-теоретического познания.*** И то, и другое треугольник Паскаля демонстрирует с эмпирически данной наглядностью.

В лице многоуровнево-иерархичного треугольника Паскаля (вернее, цикла его познания) эволюционная теория познания обретает свой ***элементарный объект*** – по прямому подобию простейшего, водородного атома в истории становления нерелятивистской квантовой теории или мушки-дрозофилы в истории становления классической генетики. Наиболее близкий к нам по времени аналог – это простейшие квадратичные итерационные преобразования Б. Мандельброта на комплексной плоскости $\mathbf{Z \rightarrow Z^2 + C}$. Заодно этот историко-научный пример едва ли не ярче всего показывает, сколь непростыми могут быть такие элементарные объекты научных теорий. Они элементарны *только в сравнении* с более сложными формами проявления основных законов научных теорий. Так, в итерационных преобразованиях Мандельброта переход к хаосу по сценарию каскада бифуркаций удвоения периода наиболее элементарен по сравнению с его прямыми аналогами в физике плазмы и фазовых переходов, в динамике популяций, в экономических кризисах и т. п. Но бесконечная сложность вскрытой им фрактальной фантасмагории сочетается с его элементарностью поистине на грани абсурда!

При определённом подходе ***эвристическое*** постижение многоуровневой природы треугольника Паскаля превращается в элементарный, но полноценный цикл научного познания. В отличие от познавательных циклов реальной науки, он скоротечен, легко обозрим в целом, а его логико-гносеологический анализ не требует предварительной и тщательной работы с конкретно-научным и историко-научным материалом. Всё конкретно-научное – на уровне математики, доступной и восьмикласснику.

В этой связи я считаю уместным здесь пространное цитирование своей монографии [33]. Там всё представлено как мысленный эксперимент с группой испытуемых, но этот эксперимент более чем реалистичен. Из года в год я провожу его над своими студентами и аспирантами. В начальной фазе всё развивается стандартно, в полном соответствии с ***законом эвристического освоения нового объекта через эмпирико-аналитическую фазу к теоретико-синтетической.*** Познавательная ситуация отнюдь не надуманная, поскольку всегда можно набрать такую группу испытуемых (даже с высшим техническим образованием), которая о треугольнике Паскаля действительно ничего не знает.

10.1. Об эмпирико-аналитическом и теоретико-синтетическом уровнях научных знаний

Испытуемым этот объект представляется как россыпь из чисел его первых 14-ти строк. Каждое из них выписано на своей полоске плотной бумаги, а вся эта партия эмпирически данной информации заключена в коробочку № 1. Испытуемым предлагается самим творчески сгенерировать концепцию арифметического треугольника, и тогда они смогут поштучно теоретически предсказать содержимое коробочки № 2 с числами последующих 10-ти строк. То есть, им предлагается развернуть ***фронтальное эмпирико-аналитическое изучение*** этой системы чисел и ***на основе его результатов*** построить её ***научную теорию.*** При этом логико-гносеологическая специфика эмпирико-аналитического и теоретико-синтетического познания воспроизводятся не то что полноценно, но с такими тонкостями, каких по сей день

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11^{00} – до 18^{00})
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

не понимают и многие профессионалы в области философии науки. Этот объект эвристического познания у меня в монографии фигурирует под названием «Объект-1», поскольку далее появляется и Объект-2 (расширенный, десятичный арифметический треугольник), который в данной статье фигурировать не будет.

«Экспериментатор сразу же объявляет испытуемым: *«Вы будете иметь дело с элементами некоей системы натуральных чисел. Ваша задача заключается в том, чтобы* ***усмотреть эту систему в многообразии её опытно данных элементов.*** *Вот вам для начала 135 таких элементов из первой коробки»*. При этом он высыпает перед испытуемыми 135 полосок плотной бумаги, на каждой из которых написано своё число. Вот часть этих чисел в россыпи:

1, 5, 252, 1, 1, 56, 220, 3, 3003, 3003, 8, 10, 15, 21, 495, 28, 1365, 3003, 1, 35, 1, 10, 1, 7, 1, 210, 1, 1, 3003, 1, 3, 20, 330, 462, 6435, 165, 120, 1716, 78, 1, 11, 1, 1, 7, 2002, 1287, 6, 210, 1287, 36, 462, 1001, 120, 1, 10, 1, 4, 1, 84, 1716, 15, 55, 1, 35, 924 и т. д.

Далее Экспериментатор говорит: *«Если этой опытной информации вам окажется достаточно, то вы точно предскажете содержимое второй коробки. Если её окажется недостаточно, то открывайте вторую коробку и знакомьтесь с новыми числовыми элементами. И ещё одна просьба: тщательно фиксируйте на бумаге все результаты своего анализа и вопросы, которые этим анализом индуцируются»*. Одному из испытуемых Экспериментатор поручает собирать эти документальные следы исследовательской деятельности испытуемых и складывать их в папки, формируя нечто подобное архиву публикаций в определённой области научного поиска.

Итак, перед испытуемыми поначалу просто россыпь опытно данных чисел. Подобно тому, как это имеет место в реальном научном познании, их глазам даны сугубо частные проявления пока неведомых им законов, а сами эти законы они могут только постигнуть своим умом. То, что числа представляют собой отнюдь не случайное сборище, видно с первого взгляда на эту россыпь: единиц почему-то больше всего, в поле зрения сразу же оказываются четыре числа 3003, два числа 45... В общем, с этим надо детально разбираться.

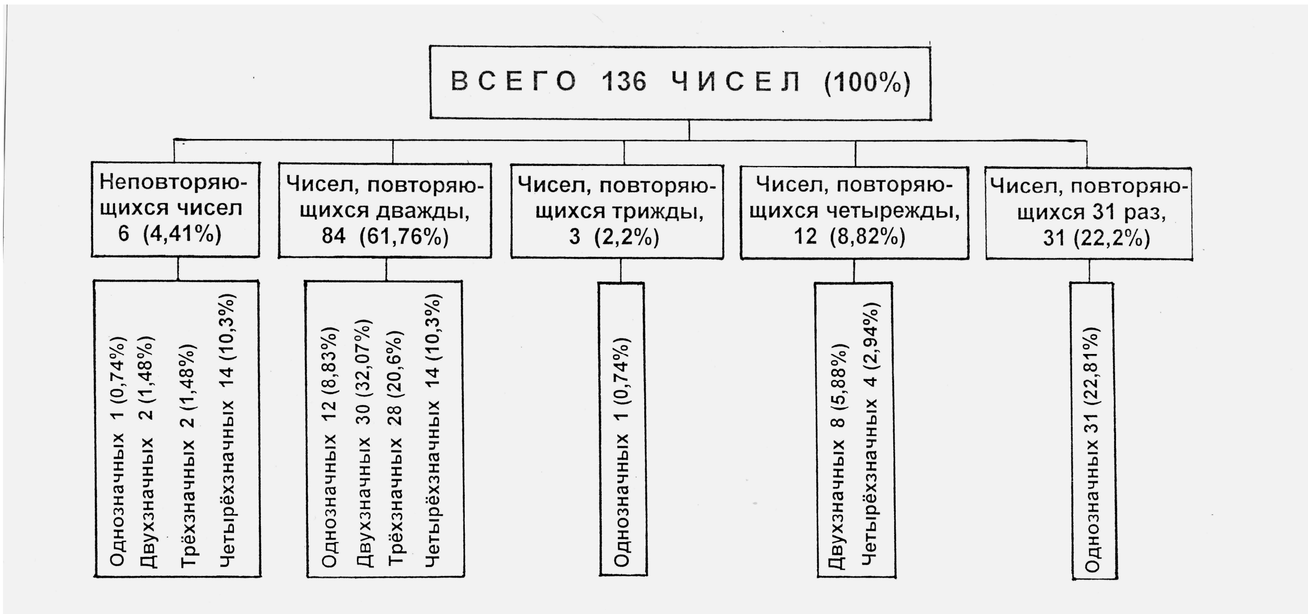
Незаметно для себя испытуемые сделали первый шаг от опытно данной пёстрой числовой конкретики к первому понятию более высокого уровня абстрактности – к понятию ***«повторяемость чисел».*** Вторым таким понятием становится понятие ***«значность чисел»,*** потому что все они явно варьируются от однозначных до четырёхзначных, по крайней мере. В результате сравнительного анализа опытно данных 135 чисел появляется их эмпирическая классификация, представленная на **илл. 29.** Итоги ЭА-изучения (эмпирико-аналитического) Объекта-1 мы сгруппируем по эмпирическим блокам, чтобы в дальнейшем оценить важность того или иного блока в эвристическом прорыве познания в ТС-фазу (в теоретико-синтетическую).

Представляя читателям эти блоки знаний ЭА-качества и обращаем их внимание на необходимость мысленно вжиться в роль испытуемых, которые располагают этими знаниями и пытаются найти в них какую-то систему. Наш «комплексный тренажёр» предоставляет читателям уникальную возможность «предметно» представить себе основные черты мышления исследователя-эмпирика на «живом», скоротечном и легко обозримом конкретном познавательном цикле.

Блок 1. На основе схемы с **илл. 29** естественно возникает такое ***сугубо констатирующее*** умозаключение: *«Числа повторяются преимущественно дважды, но это не может считаться правилом, так как из него вопиюще выпадает повторяемость числа 1. Кроме того, есть неповторяющиеся числа: 2, 20, 70, 252, 924, 3432. Число 6 повторяется трижды. В*

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11[00] – до 18[00])
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

четырёх экземплярах представлены числа 10, 15, 3003.»



Илл. 29. Первичная эмпирическая классификация части чисел Объекта-1

Блок 2. Кто-то из испытуемых подметил, что *все неповторяющиеся числа чётные. Среди чисел, повторяющихся дважды, чётных и нечётных не поровну, но их доли сопоставимы. Трижды повторяющееся число 6 чётное. Среди четырежды повторяющихся чисел одно чётное и два нечётных.* Всё это также занесено в протоколы.

Блок 3. Один из испытуемых обособился от группы и уединился со своим персональным компьютером. Через какое-то время он снова влился в группу и сообщил о своих опытных открытиях: *«Я просчитал на компьютере составленность чисел из далее неделимых, простых субэлементов 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 и так далее. Интересные явления обнаруживаются! Чисел с простым субэлементом-делителем 2 насчитывается 55 штук, с делителем 3 – 58 штук, с делителем 5 – 38 штук, с делителем 7 – 43 штуки, с делителем 11 – 40 штук, с делителем 13 – 34 штуки. Всё примерно пропорционально, но далее вдруг – резкий обрыв. Ни одного числа с простыми делителями 17, 19, 23, 29 и так далее! Со степенями простых субэлементов-делителей тоже дело обстоит странно. Имеется 27 чисел с делителем 2^1, 19 чисел с делителем 2^2, 9 чисел с делителем 2^3. (Пропорция почти 3:2:1.) Имеется 45 чисел с делителем 3^1, 17 чисел с делителем 3^2 – и ни одного числа с делителем 3^3. Совсем нет чисел с делителями 5^2 и 5^3, 7^2 и 7^3, 11^2 и 11^3, 13^2 и 13^3.»* Результаты этих углублённых наблюдений над свойствами Объекта-1 также занесены в протоколы исследовательской деятельности испытуемых вместе с программой соответствующего автоматического компьютерного анализа.

Блок 4. В протоколах зафиксировано также, что *однозначные, двухзначные, трёхзначные и четырёхзначные числа находятся в пропорции 1 : 0,94 : 0,68 : 0,4.*

Блок 5. Отмечено, что *только 13% чисел, кратных 2-м и 5-ти, пересекаются между собой и дают числа, кратные 10-ти.*

Блок 6. Отмечено, что *имеются числа, представляющие собой сумму двух других числовых элементов этой системы. Таковы числа 3003 = 1001 + 2002 и 5005 = 2002 + 3003. Это обстоятельство само бросается в глаза при первом же знакомстве с россыпью чисел. В дальнейшем было предпринято особое и весьма кропотливое компьютерное исследование опытного материала, и оно показало, что каждый элемент-число можно представить в* *виде суммы двух других. Часть чисел представляет собой сумму трёх других: 70 = 30 + 15 + 20; 462 = 210 + 126 + 84; 126 = 56 + 21 + 15 и др. Часть элементов-чисел представляется в виде суммы четырёх других: 220 = 55 + 45 + 36 + 84 и др. Далее было обнаружено, что особенно хорошо числа-элементы комбинируются из суммы других, если начинать Суммирование с единицы по возрастающей: 35 = 1 + 4 + 10 + 20; 120 = 1 + 7 + 28 + 84; 5005 = 1 + 6 + 21 + 56 + 126 + 252 + 462 + 792 + 1287 + 2002 и др. К каждому числу из россыпи таким образом можно подобрать свою сумму других. При этом для неповторяющихся чисел такая сумма может быть только одна. Например: 252 = 1 + 5 + 15 + 35 + 70 + 126. Для чисел, повторяющихся дважды, таких сумм две. Например: 84 = 1 + 6 + 21 + 56 ; 84 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28. Для трижды повторяющегося числа 6 таких сумм может быть три: 6 = 1 + 5; 6 = 1 + 2 + 3 и 6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1. Для четырежды повторяющихся чисел таких сумм может быть четыре. Например: 3003 = 1 + 10 + 55 + 220 + 715 + 2002; 3003 = 1 + 8 + 36 + 120 + 330 + 792 + 1716; 3003 = 1 + 5 + 15 + 126 + 210 + 330 + 495 + 715 + 1001; 3003 = 1 + 6 + 21 + 56 + 252 + 462 + 792 + 1287.*

Эти результаты вместе с компьютерной программой анализа чисел стали са́мой весомой частью в протокольной фиксации результатов исследовательской деятельности испытуемых в ЭА-фазе [1].

Блок 7. Отмечено, что *числа натурального ряда представлены подряд только от 1 до 15, а далее они следуют с разрывами: 20, 21, 28, 35, 36, 45, 55, 66, 70, 78, 84, 91, 105 и т. д. В этих разрывах пока не усматривается никакой регулярности.*

Блок 8. Отмечено, что *количество единиц (а их 30 штук) ровно в два раза превосходит число 15, на котором обрывается последовательное представительство чисел натурального ряда.*

Блок 9. Отмечено, что *простые числа составляют незначительную часть. Это – числа в пределах от 1 до 15, т. е. числа 2, 3, 5, 7, 11 и 13. Все остальные числа составные. Все простые числа, кроме числа 2, повторяются дважды.*

Блок 10. Отмечено, что *неповторяющиеся числа одной значности представлены парами: 2 и 6, 20 и 70, 252 и 924. Сделано предположение о том, что пара к четырёхзначному числу 3432 присутствует во второй коробке с числами Объекта-1. Там же должны па́рами находиться неповторяющиеся пятизначные, шестизначные и т. д. числа. Предполагается, что и они будут чётными.*

Итак, эти протоколы исследовательской деятельности испытуемых показывают, что она в ЭА-фазе познания Объекта-1 была весьма продуктивной. Информационный барьер, ниже которого даже гений не сможет усмотреть за эмпирически данными свойствами чисел управляющего ими закона, явно преодолён. Но в ЭА-познании это преодоление чревато другой крайностью: достоверных, но концептуально не упорядоченных опытных знаний так много и они столь разнообразны, что теперь на пути дальнейшего эвристического познания барьер воздвигает ***избыточность эмпирической информации о новом объекте.*** В пёстром многообразии достоверно выявленных свойств объекта при этом крайне трудно усмотреть те, в

[1] Допустим, что здесь опять отличился тот испытуемый, который представил результаты блока 3. Для того, чтобы его персональный компьютер проделал этот достаточно сложный анализ 135-ти чисел, ему пришлось потрудиться над соответствующей очередной программой. Кого-то из испытуемых при этом могла посетить такая мысль: «Куда мне с моими математическими способностями пытаться создать теорию Объекта-1! Вот ведь уже какая математическая подготовка нужна.» Но этот человек смешивает работу математических понятий и методов в существенно разных ролях – в роли *средства первичной обработки опытных знаний* о новом объекте и в роли *языка будущей теории* этого объекта. На вторую роль может потребоваться совсем другая система математических понятий и методов. И она совсем не обязательно будет ещё сложнее и труднее для понимания и освоения. Так, в случае Объекта-1 его всеобщий закон будет выражен простейшим алгебраическим соотношением. При этом разобраться в математической стороне дела сможет и восьмиклассник. Но каково́ сейчас испытуемым постичь и чётко сформулировать этот закон!

которых особенно ярко проявляют себя искомые наиболее общие законы. ***Лишь после их открытия,*** когда необратимо преобразуется весь строй знаний субъекта, можно будет ***задним числом*** усмотреть соответствующие ключевые факты в массиве опытных знаний. Тогда это станет доступно каждому, кто ***в свете необратимо сложившейся целостной концепции*** станет осмысливать её ЭА-пердысторию. Но пока испытуемые ***только ищут*** подступы к этой концепции. Её основные идеи требуется выработать, не имея ничего сверх протоколов ЭА-познания Объекта-1.

Складывается в высшей степени методологически проблематичная ситуация. В общем, целостная теория Объекта-1, как обычно в науке, должна дать всестороннее объяснение опытно выявленных свойств. Но каких именно? Из всех десяти эмпирических блоков или только из их части? В каком блоке искать ключевые факты? Выбрав при этом какую-то группу фактов, можно ли игнорировать другие факты, которые ей противоречат?

В любом случае ясно одно: формальная логика в осуществлении качественного скачка́ познания из ЭА-фазы в ТС-фазу мышлению не помощница. Тут от человека требуются совсем другие, ***принципиально неформализуемые*** качества интеллекта: наблюдательность; способность генерировать системный, целостный образ объекта в условиях, когда пёстрые и сильно избыточные опытные знания этому не только не способствуют, но и сильно мешают. Работая в тесном взаимодействии с другими членами исследовательской группы, автор Генеральных ТС-обобщений должен к тому же обладать незаурядными волевыми и психологическими качествами: верой в успех наперекор скептикам; верой в возможность простого решения, когда остальные члены группы уверяют его, что без обращения к какому-то изощрённому математическому аппарату целостную теорию Объекта-1 не построить; уверенностью в том, что известных опытных знаний более чем достаточно, в то время как вся остальная группа уже переключилась на изучение содержимого второй коробки Объекта-1, надеясь там отыскать ключ к его целостной теории. В-общем, в нашем элементарном познавательном цикле на рубеже ТС-фазы автор открытия должен обладать задатками гениального первооткрывателя новых законов. И если бы не периодические незаметные подсказки Экспериментатора, то неизвестно, смогла бы вообще исследовательская группа вырваться из сложного, но концептуально «рыхлого» ***эмпиризма*** в своём понимании Объекта-1…

Представим себе, что в исследовательской группе есть человек с вышеотмеченными задатками. Возможно много сценариев, по которым его мышление будет где-то восходить к генеральному открытию, а где-то идти к нему напролом. Для простоты оставим в стороне сценарии, в которых он может проделать этот путь в интеллектуальном общении с другими участниками группы. В уме талантливого исследователя есть свой «внутренний оппонент», обеспечивающий здоровое взаимодействие аргументов «за» и «против» на этом пути. Самокритичность вполне может заменить ему то, что́ иному человеку может обеспечить только критический анализ результатов его мышления другими людьми. Рассмотрим один из сценариев выхода эвристического мышления такого человека на генеральное ТС-обобщение знаний об Объекте-1. Он выходит на своё открытие в одиночку, сопоставляя аргументы и контраргументы.

Аргумент: *Ключевым обстоятельством представляется двухкратная повторяемость большинства чисел.*

Контраргумент: *Но сколько из этого «правила» исключений! Особенно – эти 30 единиц. Такие исключения оставляют от «правила» рожки да ножки.*

Аргумент: *Эти исключения из правила на са́мом деле могут оказаться только его подтверждениями. Так в истории науки бывало не раз. В истории химии XIX века многочисленные исключения из правила целочисленности атомных весов теоретики игнорировали. И правильно делали. Открытие изотопов с помощью масс-спектрографа показало незыблемость коренного дальтоновского принципа целочисленности атомных весов.*

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11 00 – до 18 00)
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

Контраргумент: *Ну-ну...*

Аргумент: *Числа явно имеют тенденцию возрастать по абсолютной величине. А что, если их представить в виде таблицы, в которой они шаг за шагом увеличиваются по своей абсолютной величине и по своему количеству?*

Контраргумент: *Хороша аргументация в познании* ***математического*** *объекта! Математики с автором такого «обоснования» даже здороваться перестали бы! Эта идея хороша для какого-нибудь философского диспута, где доказательность рассуждений если и используется, то мало кого к чему-то обязывает.*

Аргумент: *Ничуть не бывало! В математике также всё начинается с правдоподобных рассуждений и качественных моделей. Пока автор проясняет вопрос лично для себя, всё это оправдано и продуктивно. Итак, числовая таблица, в которой чем дальше, тем больше чисел и тем больше их абсолютная величина.*

Контраргумент: *Значность – это одно дело. Но как быть с повторяемостью чисел?*

Аргумент: *Если таблица будет симметричной, то повторяемость в неё впишется. Скажем, симметричность относительно вертикальной оси. Справа и слева одни и те же числа. Вот и* ***объяснение*** *опытно данной двухкратной повторяемости большинства чисел.*

Контраргумент: *А тридцать единиц? А неповторяющиеся числа? А числа, которых по три и по четыре штуки?*

Аргумент: *Если число на оси симметрии, то оно и не должно повторяться. Если то же число 6 в одном экземпляре на оси симметрии, а ещё в двух слева и справа от неё, то вот и* ***объяснение*** *опытно данной трёхкратной повторяемости этого числа.*

Контраргумент: *Но куда девать тридцать единиц?!*

Аргумент: *Да, проблема... А если конкретизировать схему? Числовой равнобедренный треугольник или числовая равнобедренная трапеция. По вертикали – ось симметрии. По горизонтали – строки. Таблица расширяется снизу вверх: чем выше, тем больше на строках чисел, тем больше сами числа по абсолютной величине. В свою очередь, на каждой из строк числовой ряд слева начинается единицей, далее числа возрастают по модулю, достигают максимума на оси симметрии, а затем симметрично уменьшаются до единицы, которая завершает строку справа. Вот и* ***объяснение*** *опытно данного особого представительства единиц!*

Контраргумент: *А ведь схема и впрямь начинает описывать опытно данные свойства Объекта-1 глобально, совокупно, системно. И с единой исходной позиции! Но в ней нет са́мого главного – общего закона, позволяющего всё отражать теоретически конкретно, детально и систематически, чётко определяя место для каждого конкретного числа.*

Аргумент: *Идея такого закона вырисовывается. Во-первых, нужен шахматный порядок расположения чисел на строках таблицы. А закономерную связь между числами подсказывает один факт из блока 2. Неповторяющиеся числа всегда чётные. Поскольку же они располагаются на оси симметрии, это означает, что сумма двух нечётных чисел нижележащей строки тоже даёт чётное число. Короче говоря, каждое число определённой строки есть сумма двух соседей с нижележащей строки.*

Контраргумент: *Довод слишком шаткий, да и следует он из весьма частного факта. Гораздо основательнее всесторонне выявленный факт из блока 6:* ***к любому*** *числу можно подобрать сумму из двух других.* ***Вот он – действительно ключевой факт!*** *Но как же он в эмпирическом блоке 6 «забит» множеством других фактов! Но теперь нарождающаяся целостная концепция Объекта-1 позволяет поставить его в совершенно особое положение. Похоже, что эффективная концептуальная модель системы чисел из коробок Экспериментатора и впрямь найдена, а её закон и впрямь открыт.*

Далее этот по-настоящему гениальный участник исследовательской группы вооружается настольным калькулятором и строка за строкой наращивает по этому принципу выработанную им концептуальную схему Объекта-1.» (См. схему на **илл. 3**.) «Сопоставляя эту схему с

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11^{00} – до 18^{00})
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

содержимым первой коробки с числами, он осознаёт, что в этой коробке Экспериментатор разметил числа первых 14-ти строк числового треугольника. Развивая схему далее, он детально предсказывает сложное содержимое второй коробки, которое в ней реально и обнаруживается.

Переломный рубеж ***эффективной теоретизации*** знаний об Объекте-1 успешно преодолён. Генеральное теоретическое открытие состоялось, но путь к нему не имел ничего общего с мышлением по какому-то «алгоритму открытия». Не имел он ничего общего и с выводом основоположений теории непосредственно из многообразия знаний эмпирического уровня. Тем не менее, это открытие состоялось в полном соответствии с основным законом эволюционной гносеологии, согласно которому, успехи теоретического синтеза знаний всецело определяются предшествующими успехами опытного познания в ЭА-фазе. Это так несмотря на то, что возможны многие другие конкретные сценарии выхода эвристического познания на эти открытия…

Основы первой эффективной теории Объекта-1 заложены. Назовём эту теорию теорией T_1, так как ей процесс эффективной теоретизации знаний об Объекте-1 отнюдь не завершён. В дальнейшем будет сформирована теория T_2. Но пока важно разносторонне реализовать объясняющие способности теории T_1 по отношению к наличным опытным знаниям. Нашим читателям важно не только понять, но и основательно прочувствовать, сколь радикально изменились знания субъекта об Объекте-1, сколь радикально изменился стиль и сам способ рассуждений субъекта.

Подчеркнём ещё раз, что навыки такого воображаемого вживания в разные познавательные ситуации и в разные типы мышления элементарно необходимы для полноценного овладения началами эволюционной теории познания.

В ***<u>блоке 1</u>*** теория T_1 естественно объясняет все эффекты повторяемости чисел. Ему же она обязана формированием эффективной концептуальной схемы Объекта-1.

В ***<u>блоке 2</u>*** теория T_1 подтверждает предположение о том, что все неповторяющиеся числа чётные. Более того, из неё следует, что подлинно неповторяющееся число только одно. Это – число 2. Остальные в Объекте-1 представлены в количестве 3-х штук, подобно числу 6. Эти числа просто не попали в первую коробку Экспериментатора. Весьма существенная теоретическая коррекция первоначальных интерпретаций опытных знаний об Объекте-1!

В ***<u>блоке 3</u>*** теория T_1 пока бессильна что-либо объяснить. Здесь испытуемый с помощью персонального компьютера фактически добыл такие опытные знания, объяснение которых по силам только качественно более глубокой теории Объекта-1... А пока теория T_1 может и даже должна эту достоверную фактологию ***спокойно игнорировать*** – подобно тому, как периодическая система Менделеева десятилетиями уходила от проблемы объяснения дробных атомных весов ряда элементов.

Факт, зафиксированный в ***<u>блоке 4</u>,*** теперь представляется второстепенным и неинтересным. То же можно сказать и о ***<u>блоке 5</u>*** **.**

Одному из фактов ***<u>блока 6</u>*** теория T_1 обязана открытием своего главного закона. Это – факт простейшей составленности каждого числа Объекта-1 из суммы двух других. С более сложной составленностью чисел из сумм других пока теоретически разобраться невозможно. Для этого теорию T_1 следует должным образом формализовать, что́ представляет собой особую творческую задачу, хотя и несравненно более лёгкую, чем проблема эвристического прорыва с ЭА-уровня знаний к основаниям ТС-уровня.

Факт из ***<u>блока 7</u>*** элементарно объясняется достигнутым пониманием того, что в первой коробке Объекта-1 собраны лишь числа первых 14-ти строк, тогда как числовую таблицу можно наращивать неограниченно. Этим же объясняется факт из ***<u>блока 8</u>.***

Факт из ***<u>блока 9</u>*** отчасти объясняется той же причиной. Числа натурального ряда в своей последовательности представлены только в ближайших соседях крайних косых столбцов из единиц. Но в целом, вопрос о представительстве простых чисел в этой системе чрезвычайно сложен. Он заслуживает особого тщательного изучения, венчаемого особой теорией….

Факт из ***блока 10*** теперь представляется не имеющим существенного значения.

Итак, теория T_1 разносторонне показала свои объясняющие способности. Её прогнозы относительно ещё не наблюдавшихся в опыте свойств Объекта-1 с очевидностью предстают как ***непосредственное продолжение её объяснений того, что́ из опыта известно.*** Теперь возникает задача придания теории ***канонической формы*** – задача её ***эффективной формализации.»*** [33, с. 270–281].

Последнее в данной статье уже сделано: см. схему на **илл. 3** с основополагающим абстрактно-всеобщим законом (39) теории T_1.

«Прежде всего, закон (39) с очевидностью занимает в ней место ***первопосылки в иерархии других посылок многоступенчатого дедуцирования опытно выявленных свойств Объекта-1.*** Теперь любой эффект опытно данного представительства чисел в коробках объясняется с позиций формализма T_1, а это – схема треугольника Паскаля с законом (39) во главе.

Для примера проследим логическую цепочку объяснения факта из эмпирического блока 2. Чётность всех трижды повторяющихся чисел объясняется так: *«Согласно закону (39), каждое число арифметического треугольника есть сумма двух соседних чисел с нижележащей строки. Если сложить два чётных числа, то суммарное число будет чётным. Если сложить два нечётных числа, то суммарное число также будет чётным. Так как у числа на оси симметрии арифметического треугольника ближайшие соседи снизу одинаковые, то в любом случае складываются либо только чётные, либо только нечётные числа. Так как одно из трижды повторяющихся чисел располагается на оси симметрии, то такие числа могут быть только чётными, что́ и наблюдается на опыте»*.

Это – типичная сложная логическая дедукция в духе математических доказательств. И на выходе она даёт надёжный вывод, удостоверяемый обращениями к опыту. Но эта эффективная дедукция с достоверным выводом была совершенно невозможна в ЭА-фазе. Тогда испытуемым было известно только несколько фактов чётности всех неповторяющихся чисел. К тому же испытуемые тогда имели превратное представление о характере их подлинной повторяемости: на са́мом деле правилом является трёхкратная повторяемость ряда чётных чисел (за исключением числа 2), но это правило в ЭА-фазе представлялось как исключение для числа 6. Испытуемые тогда могли строить только сугубо предположительные выводы об этом эффекте. В ЭА-фазе с её домированием неполной индукции у них не было никаких оснований утверждать, что дальнейшее ознакомление с опытно данным разнообразием чисел не принесёт им нечётные числа с такой повторяемостью.

Будучи эффективно формализованной, теория T_1 теперь способна с позиций того же центрального закона (39) объяснить все эффекты составленности чисел-элементов из сумм других. Всё многообразие последней группы фактов из эмпирического ***блока 6*** объясняется тем, что каждое число в треугольнике Паскаля может быть получено также ***многоступенчатым*** суммированием по закону (39), начиная с единицы на определённой строке. Логической первопосылкой при таком объяснении, опять-таки, является закон (39), хотя форма его действия более сложная. В случае любого числа при этом складывается цепочка из последовательных шагов такого суммирования по закону (39), при котором результат первого шага тут же становится одним из условий второго шага и т. д.:

$$1 + N_{n,2} = N_{n+1,2} + N_{n+1,3} = N_{n+2,3} + N_{n+2,4} = N_{n+3,4} + N_{n+3,5} = N_{n+4,5} + \dots$$

На схеме треугольника Паскаля при этом видно, что суммирование чисел $N_{n,k}$ осуществляется «змейкой». Начинаясь с одной из крайних единиц, оно идёт по одному из столбцов. И на любом этапе обрывания этого вычислительного процесса мы получаем очередное число $N_{n,k}$ как сумму только из тех чисел столбца, которые начинаются с единицы

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11[00] – до 18[00])
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

и кончаются его ближайшим соседом справа на нижней строке. Это так и для повторяющихся чисел, хотя для каждого из них при многоступенчатом суммировании по закону (39) образуется сумма из других чисел.

Если для выявления этой группы фактов из эмпирического блока 6 в ЭА-фазе в нашем реалистичном мысленном эксперименте требовалось составление особых программ для анализа опытно данных чисел с помощью электронно-счётного автомата, то их объяснение в рамках теории T_1 с позиций закона (39) осуществляется просто и единообразно. Но в том случае, если бы в ЭА-фазе эти факты не были выявлены, то они пошли бы в актив прогнозам теории T_1. Ведь к её выработке можно эвристически прорваться, и не зная этих фактов.

Как видим, развёртывание теории T_1 по отношению к эмпирически данной россыпи чисел Объекта-1 не сводится к нереалистичному единообразному объяснению всех опытных фактов. В чём-то существенном оно воспроизводит специфику познавательных процессов в реальной науке, где ***сформировавшаяся теория позволяет увидеть более сложные и тонкие эффекты в опытно выявленных свойствах объектов познания.»*** [33, с. 283–285.]

10.2. Треугольник Паскаля как несколько существенно разных теоретических описаний

После представления читателям эмпирико-аналитической фазы постижения сущности треугольника Паскаля как Объекта-1 сам треугольник Паскаля на **илл. 3** с его основополагающим законом (39) легко воспринимается *именно как научная теория T_1*. Подчеркну ещё раз, что такое представление «общеизвестного» треугольника Паскаля отнюдь не надуманное: можно найти сколько угодно людей, которые о нём не знают, и организовать из них группу испытуемых в логико-гносеологическом эксперименте с *эвристическим* познанием Объекта-1. А тем, кому треугольник Паскаля хорошо знаком, надо лишь приложить немного специфического воображения, чтобы мысленно поставить себя на место одного из таких испытуемых, мысленно вжиться в *их* восприятие этой числовой системы на уровне блоков эмпирико-аналитических знаний о ней. (Да ещё в форме аналога архива публикаций – письменных результатов исследовательской деятельности группы, складываемых в папки, да ещё с программами компьютерного анализа свойств чисел из первой коробочки Объекта-1!) Но далее для нас будет важен не сам этот факт возможности её эмпирико-аналитического или теоретико-синтетического понимания. Далее будет важен фактор существенно разных научно-теоретических подходов к треугольнику Паскаля.

Теория T_1 – первичная и самая грубая. Если постигать сущность числовой системы от эмпирико-аналитического уровня знаний, то ничего другого для ***первичной эффективной теоретизации знаний*** невозможно придумать ***в принципе.*** Так дело обстоит и в реальной теоретической науке, где первичные теории многоуровневых объектов всегда ***феноменологические*** и ***сравнительно наиболее грубые.*** Они впервые генеральным образом приводят в систему концептуально «рыхлые» эмпирико-аналитические знания, но их первичные постулаты оставляют свои открытые вопросы и сами определённое время не могут быть объяснены. Так, в 1869 г. периодический закон Д. И. Менделеева навёл генеральный теоретический порядок в химии, хотя о ядерно-электронной структуре атома и о протонно-нейтронной структуре его ядра наука узнала только в 1911–1932 гг. Сам этот закон получил научно-теоретическое объяснение с позиций понятия о спи́не электронов и принципа Паули, выработанных на «финишной прямой» становления нерелятивистской квантовой механики в 1926 г. (В свою очередь, квантово-релятивистская природа самого́ внутреннего квантового числа «спин» по сей день остаётся одной из открытых проблем субъядерной микрофизики.)

Тем, что научно-теоретические подходы разной глубины в широких пределах не зависят друг от друга, непосредственно отражается объективная широкая относительная

независимость друг от друга (автономность) самих комплексов явлений на разных структурных уровнях объекта. А концептуальная «несоизмеримость» теорий разных уровней, радикальные различия их понятий и методов логико-выводного развития непосредственно отражают объективную разнокачественность комплексов свойств объекта на разных уровнях его структурной организации. И всё это великолепно воспроизводится в сравнительно элементарной форме многообразием научно-теоретических описаний треугольника Паскаля.

Научно-теоретический уровень T_1 с его законом (39) имеет много других объясняющих способностей. В дополнение к вышеупомянутым, отмечу, что концептуальная схема с **илл. 3** позволяет методом полной индукции доказать, что суммы чисел $N_{n,k}$ по строкам дают двоичный ряд. И всё это – безотносительно к знаниям о внутренней структуре чисел $N_{n,k}$. Последний фактор в теории T_1 не учитывается подобно тому, как в теоретической химии XIX в. не учитывался (по причине безусловного незнания) фактор внутренней структуры атомов. Если эвристически генерировать идею треугольника Паскаля из массива эмпирико-аналитических знаний, то важнейшим постулатом становится постулат о симметричности чисел $N_{n,k}$ относительно вертикальной оси. Но сам этот постулат при невольном незнании внутренней структуры чисел $N_{n,k}$ или при вольном отвлечении от неё не может быть объяснён. То же самое можно сказать о ситуации, когда человек знает только о треугольнике Паскаля (построение которого, по словам М. Гарднера, доступно и десятилетнему ребёнку), но не знает о его связи с биномом Ньютона.

Широко известна связь треугольника Паскаля с биномом Ньютона через одно из важнейших понятий перечислительной комбинаторики:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,(n = 0,1,2,3,...; k = 0,1,2,3,...) \qquad (41)$$

Оно уже очевидным образом является ключевым понятием качественно более глубокой теории T_2. ***Это так постольку, поскольку формула (41) по-своему задаёт внутреннюю структуру чисел*** $\boldsymbol{N_{n,k}}$. Она склонна «смыкаться» с канонической формулой представления составного натурального числа через произведение его простых субэлементов-делителей (40): в результате «опустошительных сокращений» в рядах чисел *n!*, *k!* и *(n – k)!* в числителе и в знаменателе дроби она сразу же представляет число $N_{n,k} \equiv C_n^k$ как каноническое произведение простых субэлементов-делителей. (Кстати, треугольник Паскаля с числами, структурированными по закону (40), показывает, что это основное понятие перечислительной комбинаторики может конкретно выражаться простыми числами только в немногих исключительных случаях, соответствующих второму косому столбцу, где представлены числа натурального ряда с характерным для него распределением простых чисел.) С позиций теоретико-множественного понятия C_n^k ***объясняется*** симметричность чисел $N_{n,k}$ относительно вертикальной оси треугольника Паскаля, которую при подходе T_1 можно ***только констатировать.*** Наконец, как показано в § 8, отождествление $N_{n,k}$ с C_n^k позволяет рассчитать числовые фракталы треугольника Паскаля рекуррентным формализмом счётной линейки. ***Именно этот формализм является полной версией теории T_2.***

Вместе с тем, широкая относительная автономность демонстрируется и комплексом свойств фрактальных субструктур треугольника Паскаля. Они были открыты мной в начале 1980 г., а рекуррентный алгоритм их расчёта (т. е. их систематическое объяснение) я изобрёл только в конце 1987 г. Вначале я воспринимал их только как цветографический эквивалент аналитического расчёта треугольника Паскаля по закону (39) с учётом того, что каждое число $N_{n,k}$ само структурировано на основе принципа (40). В сущности, цветографические схемы оставались *теорией T_1, которая наилучшим образом приспособлена для систематического исследования треугольника Паскаля на наиболее глубоком структурном уровне простых чисел.* Будучи модифицированной «старой» теорией T_1, цветографические схемы наилучшим образом информировали о тех его свойствах, которые должна систематически объяснить (т. е. рассчитать) «новая» теория T_2. По своей логико-гносеологической сущности мои цветографические схемы представляют собой ***феноменологическую теорию $ФТ_2$, которая оптимальным образом мобилизует знания менее глубокой теории T_1 в области более глубокой теории T_2.*** Теория $ФТ_2$ великолепно воспроизводит специфику феноменологических теорий в реальной теоретической науке, где всё качественно новое органически вырастает из старых теоретических знаний, эвристически направляется их понятиями, концептуальными схемами, расчётными методами.

Развитие теории $ФТ_2$ великолепно демонстрирует свою относительную автономность, независимость от логики развития теоретических описаний T_1 и T_2. По начальным, более или менее развитым фрагментам цветографических схем довольно быстро распознаётся универсальный закон их самоподобного поступательного усложнения как детерминистских фракталов. А далее развитие этих числовых структур осуществляется в ключе их чисто геометрического наращивания. ***Чисто геометрический*** характер такого развития теории $ФТ_2$ лучше всяких слов говорит о ярко выраженной автономности логики этого теоретического познавательного процесса, о его своеобразии по сравнению с ***аналитическими*** развитиями теории T_1 (по закону (39)) и теории T_2 (методом счётной линейки). Ввиду сравнительной элементарности этого познавательного процесса качественное своеобразие теоретического исследования методом развития цветных «мозаик» самым непосредственным образом отражает ***объективную*** относительную автономность геометрического аспекта организации простых субэлементов-делителей в треугольнике Паскаля.

Конечно, грань между теорией $ФТ_2$ как ***знанием*** о «недрах» треугольника Паскаля и самими этими «недрами» как объективной реальностью тонка и неочевидна. Тем не менее, эта грань отнюдь не условная и достаточно чёткая. Во-первых, сами его субструктуры объективно не имеют предела развития, а их цветографические схемы ограничены. Во-вторых, для каждого исследователя, берущегося за их развитие, не так-то просто постигнуть его основное правило. Это также отличает развитие $ФТ_2$ как познавательный процесс от его объекта. В-третьих, цветографические схемы, как всякое человеческое научно-теоретическое знание, имеют свои по-человечески конвенциональные элементы, которых нет в самих числовых субструктурах треугольника Паскаля. Так, их графическую основу можно составить не только из «пчелиных сот», но также из «кирпичиков», кружочков, точек. Представленный здесь цветовой код также является одним из многих возможных. Наконец, цветографические схемы $ФТ_2$ исследуют организацию каждого простого субэлемента-делителя порознь, в то время как в их объекте они присутствуют вместе. Так что, противопоставление $ФТ_2$ самим субструктурам треугольника Паскаля отнюдь не надуманное.

Хотя, конечно, надо иметь в виду, что *в наиболее чистом виде* теория $ФТ_2$ выступает в роли научной теории в такой ситуации, когда первичная, опытная информация представлена в виде коробочки с числами $N_{n,k}$, каждое из которых структурировано в соответствии с каноническим правилом представления составных чисел из простых субэлементов-делителей. Такая познавательная ситуация не является надуманной по тем же причинам, которые отмечались выше. Методологическая проблематичность такой познавательной ситуации в моей монографии рассмотрена особо и она с эмпирически данной очевидностью воспроизводит методологическую проблематичность *первичной* эффективной теоретизации опытных знаний о многоуровневых объектах [33 , с. 313–344].

Кстати, вариабельность конвенциональных элементов теории $ФТ_2$ даёт наглядный материал для того, чтобы основательно понять и прочувствовать, что такое *объективная истин-*

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11[00] – до 18[00])
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

ность научно-теоретических знаний как их *независимость от подобных конвенциональных элементов*. Так, человек вполне овладевает объективно-истинным пониманием организации простых субэлементов-делителей, если оказывается в состоянии свободно переходить от одного цветового кода к другому, а также видеть однотипность фрактального самоподобного усложнения цветографических схем для разных простых субэлементов-делителей. По личному опыту первооткрывателя этих субструктур знаю, что для этого требуется немалое время. Я осваивался со своими цветографическими схемами более трёх месяцев.

В философии науки второй половины XX в. немало было написано по поводу ***концептуальной несоизмеримости*** научных теорий разной глубины и общности. Классическим примером из теоретической физики могут служить макроскопическая (феноменологическая) термодинамика и кинетическая теория тепла, формулируемые в существенно разных исходных понятиях, развиваемые существенно разными математическими метолами. К логико-методологическому осмыслению этого феномена привлекались даже знаменитые теоремы Гёделя о неполноте.

Между тем, теоретические описания треугольника Паскаля T_1, $ФT_2$ и T_2 демонстрируют свои концептуальные несоизмеримости очевидным и наглядным образом. В T_1 исходным понятием является понятие $N_{n,k}$. Её развитие по закону (39) можно осуществлять только поступенчато: от одной строки треугольника Паскаля к следующей, от неё – к следующей и т. д. и никак иначе. В $ФT_2$ исходным понятием является понятие далее неделимого модуля цветовой структуры. Акты развития $ФT_2$ (т. е. закраски геометрических ячеек) сразу же захватывают целое поле чисел $N_{n,k}$ между строками n, номера которых соответствуют показателю степени простого субэлемента-делителя. Исходным понятием T_2 является комбинаторное понятие числа сочетаний из n по k. Формализм счётной линейки позволяет просчитать любую строку треугольника Паскаля безотносительно к просчётам других строк.

10.3. Общесистемная подчинённость низшего высшему

В советской философии науки 60–80-х гг. XX в. имело место мощное «системное движение». Оно изучало многообразие системных подходов науки к своим объектам, системность само́го материального мира объективной реальности, своеобразие кибернетических систем как информационно-управленческих и др. В этом русле находилась разработка научно-мировоззренческой концепции уровней структурной организации мироздания как целого и его подсистем. В этом же русле находилась тогда не очень-то популярная (и даже «идеологически сомнительная») идея систематического перевода марксистско-ленинской эволюционной гносеологии с первичного и неоптимального «диалектического» языка гегельянства и классического марксизма на современный язык учений о многоуровнево-иерархичных системах. Две последних установки я с начала 70-х гг. принял к систематическому исполнению и развитию. Одним из плодов того, что я не остановился на уровне их спорадических прокламирований, стали фрактальные субструктуры треугольника Паскаля, которых математики веками не замечали и которые я «выловил голыми руками». Результаты моей сорокалетней исследовательской деятельности в этом научно-мировоззренческом и методологическом ключе представлены в [33], а также в трёх моих учебниках [35], [36] и [37], которые только что вышли в свет. То, что я, скорее всего, до сих пор в отечественной философии науки систематически развиваю эту линию в полном одиночестве, меня отнюдь не радует. Надеюсь, что статус «грифованных» учебников трёх последних книг положит конец этому одиночеству.

Для эффективной модернизации понятийного аппарата эволюционной теории познания из результатов вышеупомянутого «системного движения» наиболее важны:

- сама концепция многоуровнево-системного строения объектов рациональных человеческих знаний в большом и в малом;
- концепция многоуровнево-системной структуры рациональных человеческих знаний, т. е. знаний, выраженных в словах и понятиях, материально и даже грубо вещественно воплощённых в тексты;
- принцип относительной автономности комплексов свойств объектов на отдельных структурных уровнях;
- принцип ***иерархичности,*** которую ещё называют ***общесистемной подчинённостью низшего высшему.***

Об этом общесистемном принципе теперь и пойдёт речь.

Но прежде надо сделать замечание по поводу понятий «низшее» и «высшее». В эволюционной теории познания с ними не должен связываться какой-то моральный или духовный смысл. Их смысл связывается *только с иерархией уровней структурной организации многоуровневых систем.* По отношению к определённому структурному уровню высшие структурные уровни системы – те, в которые объекты этого уровня включены в роли элементов или подсистем. Если более высоких структурных уровней в системном объекте нет, то данный структурный уровень понимается как наивысший. Низшие структурные уровни (они же – более глубокие) – те, объекты которых являются их элементами или подсистемами.

Многоуровнево-системная модель объективного мира (и отражающих его рациональных знаний) суть ***современная версия атомистики.*** Понятие «атом как далее неделимый элемент» в ней уже имеет ***относительный смысл.*** Атом с внешними электронными оболочками неделим *как химический индивид,* но как физический микрообъект он делим на электроны и ядро, ядро делимо на протоны и нейтроны, последние делимы на кварки и глюоны. Живая клетка – далее неделимая структурная первооснова *высших организмов,* но она имеет собственную многоуровневую структуру. Человеческий индивид – далее неделимая структурная первооснова любого *социального* процесса, но сам он имеет свою многоуровневую структуру как особь биологического вида *Homo Sapiens*. Звёзды и планеты – структурная первооснова галактик, но они имеют свою внутреннюю структуру. И т. д. и т. п.

Понятие «общесистемногая подчинённость низшего высшему» в феномене объединения элементов в высшее системное целое отражает два обстоятельства. Во-первых, ***как только элементы объединяются в новую систему более высокого уровня структурной организации, так вступают в действие качественно новые законы, которые не присущи этим элементам порознь.*** Во-вторых, ***эти качественно новые законы высшего структурного уровня сильно видоизменяют свойства этих элементов, хотя и оставляют эти элементы самими собой.*** Последнее и есть общесистемная подчинённость низшего высшему.

Это – принцип поистине вселенской общности. В природе, в обществе, в текстах, в которые материально воплощены рациональные человеческие знания, он проявляет себя в неисчерпаемом многообразии конкретных форм.

Так, свободные электроны могут иметь любую энергию, но в высшей системе атома энергия электронов имеет только набор квантованных значений. Нейтрон сам по себе нестабилен и распадается на протон, электрон и электронное антинейтрино в среднем за 12 минут. Но если протон и нейтрон образуют уже простейшее ядро дейтерия ^{2}H, нейтрон переходит в подчинение новым, высшим законам ядерной физики и становится стабильным. Согласно этим законам, в стабильном ядре протонов и нейтронов должно быть примерно поровну. Нейтрон в ядре может стать нестабильным в случае «перебора» нейтронов, как в ядре трития ^{3}H. Но при этом он распадается уже под действием высших законов ядра, чтобы восстановить стабильный баланс протонов и нейтронов. Свободный протон, напротив,

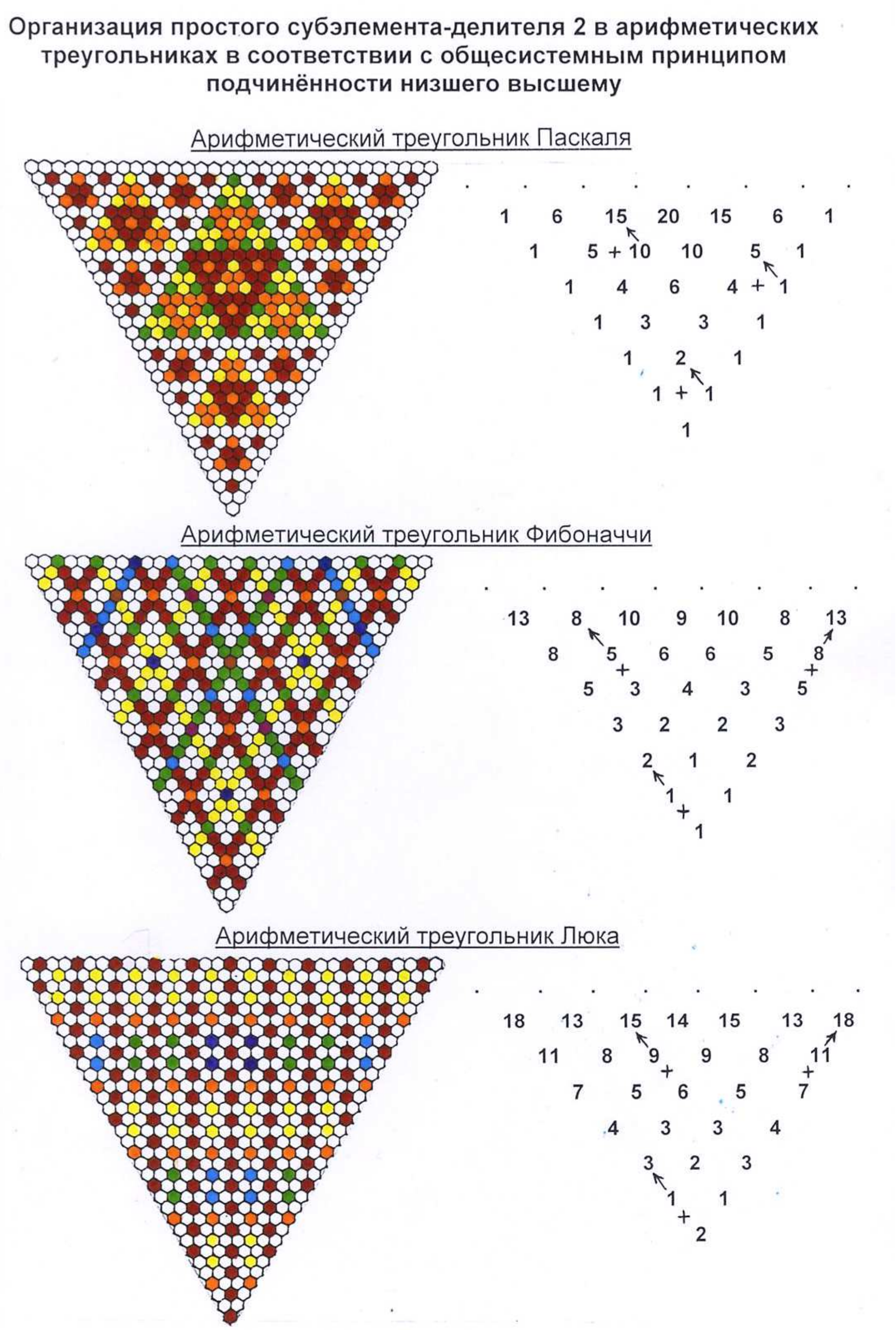
Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11:00 – до 18:00)
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

стабилен. Но в высшей системе ядра, если в ней дефицит нейтронов, он способен распадаться на нейтрон, позитрон и электронное нейтрино, чтобы восполнить дефицит нейтронов и достроить ядро до стабильного баланса. Размножение клеток в высшем организме осуществляется по тем же законам молекулярной биологии, что и в былых колониях первобытных одноклеточных организмов. Вместе с тем, оно регламентируется множеством высших законов функционирования тканей, органов, современного высшего организма в целом. Вся жизнь человеческого индивида в обществе – это сплошное подчинение его субъективных целей и желаний всевозможным высшим принципам общественной жизни. Это начинается уже с овладения родным языком в раннем детстве, во множестве форм продолжается в общем и профессиональном образовании, в профессиональной деятельности, в семейной жизни и др. В текстах смысл полисемичных слов (низшего) выявляется в контексте самого́ текста (высшего). Суждение как логическая форма более высокого уровня превращает понятия в субъект и предикат, наделяя их новым свойством распределённости, которое самим понятиям вне высшей системы суждения не присуще. И т. д. и т. п. поистине без конца.

Благодаря цветографической символике арифметические треугольники дают уникальную возможность увидеть частное проявление этой общесистемной подчинённости низшего высшему буквально воочию. Дидактическое значение этого невозможно переоценить, поскольку этот общесистемный принцип ввиду его предельной общности очень труден для постижения и систематической ориентации на него. Здесь особенно справедлива пословица о том, что лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать (или прочитать).

Но сначала подчёркнём, что уже составное натуральное число представляет собой двухуровневую систему. На низшем, глубоком уровне его структурную первооснову составляют простые субэлементы-делители. На высшем уровне натуральное число N суть натуральный числовой индивид определённой абсолютной величины. В качестве таких двухуровневых систем (сложных элементов) натуральные числа могут образовывать числовые системы ещё более высокого уровня структурной организации. Последние могут быть одномерными (натуральный ряд, ряд Фибоначчи), а также двумерными, в частности, арифметическими треугольниками.

На **илл. 30** в том же цветовом коде представлена организация простого субэлемента-делителя 2 в арифметических треугольниках Паскаля, Фибоначчи и Люка. С одной стороны, каждое из составляющих их чисел $N_{n,k}$ имеет свою уникальную внутреннюю структуру из простых субэлементов-делителей, т. е. остаётся самим собой. С другой стороны, высшие основные законы организации самих $N_{n,k}$ «лепят» из субструктуры каждого из них свои чисто фрактальные (треугольник Паскаля) и фракталоподобные субструктуры (треугольники Фибоначчи и Люка). Эти субструктуры могут образовываться тогда и только тогда, когда числа N становятся числами $N_{n,k}$, т. е. объединяются в двумерные числовые системы высшего порядка. Эта общесистемная подчинённость низшего высшему особенно наглядно проявляется в том, что существенно разные высшие законы организации $N_{n,k}$ в треугольниках Паскаля, Фибоначчи и Люка формируют и существенно разные субструктуры на наиболее глубоком уровне их структурной организации – на уровне простых субэлементов-делителей.



Илл. 30. В случае арифметических треугольников общесистемная подчинённость низшего высшему наглядна и совершенно очевидна

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11^{00} – до 18^{00})
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

§ 11. О научно-методологическом принципе соответствия

Общеметодологический принцип соответствия фиксирует один из моментов преемственности новых научных знаний со старыми, ранее выработанными и доказательно обоснованными. Сама по себе преемственность нового со старым в науке представлена так, как ни в одной другой области светской культуры. Только наука современного исторического типа осуществляет приращения своих знаний, опираясь на всё более мощный и сложный фундамент из ранее выработанных достоверных знаний. В этом заключается главная причина её уникального прогресса по сравнению с ненаучными формами познания – однозначного и необратимого. Принцип соответствия регулирует преемственность особого типа – ***преемственность новых, более глубоких теорий многоуровневых объектов с более ранними и менее глубокими теориями.***

Наиболее известна и уже средней школой популяризируется первая форма взаимоотношений между такими теориями в ключе принципа соответствия. Она заявляет о себе уже после того, как более глубокая теория сформировалась в своей канонической форме. При этом её законы переходят в законы старой теории в качестве того или иного предельного или частного случая. Законы релятивистской динамики переходят в законы классической динамики за пределами околосветовых скоростей движения. Законы кинетической теории тепла переходят в законы макроскопической термодинамики в статистических усреднениях. Периодический закон Д. И. Менделеева представляется частой формой квантовомеханического принципа Паули. Кеплеровские законы кинематики планет представляются частной формой ньютоновского закона всемирного тяготения. Старая теория после её переинтерпретации с позиций новой теории может стать её частью, подтеорией. Так, первопроходческие квантовые теории равновесного теплового излучения (**М. Планк,** 1900), фотоэффекта (**А. Эйнштейн,** 1905), индуцированного излучения (**А. Эйнштейн,** 1917) и др. – неотъемлемые части современной нерелятивистской квантовой теории, но излагаются они уже в понятиях зрелой квантовой механики 1927 г. в канонической версии Дж. фон Неймана.

Вообще, более глубокие теории, образно говоря, никогда «не отказываются от наследства». В частности, в физико-математических науках они обязаны в своих качественно новых понятиях и своими качественно новыми методами систематически рассчитывать рассчитываемое старыми теориями, по крайней мере, с такой же точностью [2].

Во второй форме принцип соответствия используется как ***эвристика эффективной мобилизации знаний менее глубокой теории на пути познания явлений более глубокого структурного уровня, которым наиболее адекватна ещё не сформированная более глубокая***

[2] В нынешние времена беспрецедентные возможности широковещательного самовыражения в электронных блиц-публикациях породили мощнейший всплеск спекулятивной псевдонауки. Кто только теперь не «атакует» теорию относительности и квантовую механику – от тщеславных дилетантствующих любителей науки до тщеславных людей с учёными степенями по совсем другим специализациям. Доморощенных «альтернативных» и, понятное дело, «р-р-революционных» псевдотеорий – легион. И всё это не по каким-то «мелочам» типа лэмбовского сдвига в атомных спектрах, сверхтекучести ^{3}Не или асимптотической свободы в квантовой хромодинамике, а сразу же по поводу теоретических первоначал. Я уже имел возможность показать вопиющее методологическое варварство таких псевдотеорий [38]. Здесь подчеркну, что их авторы начисто упускают из вида то, что в теоретической физике научно-теоретические объяснения – это *количественные расчёты* с точностью до 10^{-12}, как в квантовой электродинамике. *Действительно научная* теория, идущая существенно дальше квантовой механики и теории относительности, помимо своих качественно новых объясняющих (расчётных) способностей, обязана будет с не меньшей точностью выдержать сотни самых разнообразных тестов на былую количественную эмпирическую обоснованность этих «старых» теорий. А это – сотни частных расчётных задач из области ядерной и атомной физики, квантовой гидродинамики, квантовой физики твёрдого тела и квантовой химии. Понимать бы это нынешним псевдоэйнштейнам, так они сразу же побросали бы своё хобби и занялись бы чем-нибудь действительно общественно полезным!

теория.

De facto качественное углубление научных теорий осуществлялось так с начала эффективной теоретизации естествознания динамикой Галилея–Ньютона. Вне первичной системности знаний макроскопической (феноменологической) термодинамики невозможно было бы эвристическое продвижение физиков-теоретиков к кинетической теории тепла. Вне первичной системности знаний химии на основе периодического закона невозможно было бы эвристическое продвижение к квантовой теории атомов. Достаточно сказать, что вне её в 1913 г. Г. Мозли в принципе не смог бы сделать своё ключевое открытие соответствия номера химического элемента в периодической системе электрическому заряду ядра его атома. Впервые сознательно такой эвристикой принципа соответствия стал пользоваться Н. Бор, формируя в 1912–1913 гг. свою полуклассическую квантовую модель атома. Несмотря на свою «полуфабрикатность», она сыграла важнейшую роль в эвристическом продвижении физиков к зрелой нерелятивистской квантовой теории атома.

Взаимодействие нескольких теоретических описаний треугольника Паскаля всё это демонстрирует в простых и очевидных формах.

В этой связи ещё раз подчеркну, что T_1 уже безо всяких условностей становится первичной теорией в процессе эвристического постижения испытуемыми причин регулярностей, которые опытно обнаруживаются в россыпи чисел Объекта-1. Можно найти сколько угодно таких испытуемых, которые ничего не знают о треугольнике Паскаля, основательно погрузить их мышление в концептуально аморфные эмпирико-аналитические знания об Объекте-1, чтобы они на личном опыте познали в высшей степени эффектный переход от такого состояния знаний к «поразительно простому» закону (39). Но ярко выраженная относительная автономность теоретического описания T_1 без учёта внутренней структуры чисел $N_{n,k}$, ***относительная замкнутость*** его самосогласованной логики имеет место в любом случае.

Теория T_2 с её основополагающим понятием, определяемым формулой (41), качественно более глубокая, поскольку она структурирует каждое из чисел $N_{n,k}$. И уже на первом этапе его использования можно проверить взаимоотношения T_1 и T_2 принципом соответствия. Легко проверить, что подстановка формулы (41) в формулу (39), которая является основным законом теоретического описания T_1, оставляет этот закон в силе.

Этот «школьный трюизм» перестаёт быть таковым, если эвристически наращивать теоретические знания о треугольнике Паскаля над блоками эмпирико-аналитической информации об Объекте-1. И этим великолепно воспроизводится то, как в реальных физических теориях законы более глубоких теорий проверяются эмпирическими тестами менее глубоких теорий. Как в нашем элементарном познавательном процессе, так и в реальной науке это отнюдь не означает возврата с новым законом к старой фактологии с переобъяснениями каждого факта. Согласуясь со старым законом, новый закон автоматически обретает и его объясняющие способности. В частности, именно так в XVII в. закон всемирного тяготения обрёл все грандиозные объясняющие способности законов Кеплера в небесной механике.

Рекуррентный формализм счётной линейки даёт теорию T_2 в полностью сложившейся, канонической версии. В отличие от построчного развёртывания треугольника Паскаля в версии T_1, у этой теории совсем другой способ развития. Для расчёта фиксированной строки треугольника Паскаля ей нет надобности привязываться к данным расчёта предыдущей строки. При столь разительном отличии расчётного метода теории T_2 (метода счётной линейки) эта теория своим методом должна на любой строке давать те же результаты, что и теория T_1, т. е. те же абсолютные величины натуральных чисел $N_{n,k}$. Для этого фиксированная строка сначала просчитывается счётной линейкой для простого субэлемента-делителя 2. Затем – счётной линейкой для простого субэлемента-делителя 3. Затем – счётной линейкой для простого субэлемента-делителя 5 и т. д. После этого в каждом числе $N_{n,k}$ его простые субэлементы-делители перемножаются и получается результат, идентичный результату поступенчатого расчёта методом теории T_1.

Уже рассмотренного достаточно для понимания того, что во взаимоотношениях теорий, адекватных разным структурным уровням системного объекта, принцип соответствия отражает ***относительность*** автономности комплексов свойств на каждом структурном уровне. Часть законов разных структурных уровней не зависит друг от друга. Благодаря этому объективному (онтологическому) обстоятельству в теоретической науке становится возможным, например, открыть периодический закон, ничего не зная о внутренней структуре атомов, или открыть законы класссической генетики, ничего не зная о двойной спирали ДНК. Но в другой части законов разные структурные уровни родственны друг другу. Эту родственность и отражает принцип соответствия, устанавливая предельные, статистические и другие взаимоотношения между законами разных структурных уровней.

Следует особо подчеркнуть, что в теоретической науке продвижение от менее глубокой теории к более глубокой – это процесс в определяющей мере ***эвристически-поисковый,*** а не логико-выводной. Это – познавательный процесс ***становления*** более глубокой теории, а её логико-выводное, ***оптимально формализованное*** развитие становится возможным только в итоге прохождения познания через эту ***особую подфазу*** теоретического синтеза знаний. Старая теория лишь делает этот процесс ***более или менее систематизированным*** – в отличие от эмпирико-аналитического познания. И понятно, что ***сама такая возможность теоретического познания многоуровневого объекта от высшего к низшему предопределяется тем, что в само́м объекте имеет место общесистемная подчинённость низшего высшему. Эвристика познания в духе принципа соответствия со стороны объекта направляется именно этим общесистемным принципом.***

Всё это великолепно демонстрируется взаимоотношением теоретических описаний треугольника Паскаля. Эту научно-методологическую суть разработка основ теории $ФT_2$ и развитие её многоцветных фракталов воспроизводят не только в очевидных и наглядных формах, но и с научной полноценностью. Последнее так постольку, поскольку числовые фракталы треугольника Паскаля – это уже далеко и далеко не «школьные трюизмы». Это – новый уровень объекта, почти не изученный академической наукой.

«Проекции» закона (39) на глубочайший уровень структурной организации треугольника Паскаля очевидны. Это – сами многоцветные числовые фракталы, образуемые его простыми субэлементами-делителями. Эта форма общесистемной подчинённости низшего высшему совершенно наглядна. ***Но в ключе того же общесистемного принципа на этот базисный структурный уровень объективно как-то «проецируется» и высшая МГ-1 с её р-числами Фибоначчи.***

Стартовые исследования по выявлению этих далеко не очевидных начал будущей МГ-2 наша статья и призвана стимулировать.

§ 12. Заключение

Вряд ли **Блез Паскаль**, который в 17 в. подверг арифметический треугольник первичному разностороннему исследованию, мог подозревать, какие глубинные проблемы науки затрагивает этот, на первый взгляд, несложный математический объект. Американский математик, педагог и популяризатор науки **Мартин Гарднер** (1914–2010) описал «неисчерпаемое очарование треугольника Паскаля» в словах, которые взяты в качестве одного из эпиграфов к данной статье.

И современная история исследований треугольника Паскаля полностью подтверждает это пророческое высказывание, особенно – в свете фрактальных субструктур, которые Гарднеру были неведомы в полной мере. Мы можем отметить следующие математические результаты, которые порождает треугольник Паскаля:

1. Треугольник Паскаля и биномиальные коэффициенты порождают двоичные числа и, в

Главный редактор - д.э.н., профессор К.А. Кирсанов
тел. для справок: +7 (925) 853-04-57 (с 11^{00} – до 18^{00})
Опубликовать статью в журнале - http://publ.naukovedenie.ru

конечном итоге, теорию двоичного кодирования – арифметическую основу современных цифровых информационных и компьютерных технологий.

2. Треугольник Паскаля и биномиальные коэффициенты порождают *числа Фибоначчи,* являющиеся предметом исследования современной теории чисел Фибоначчи и золотой пропорции [10], [11], [12].

3. Через числа Фибоначчи и формулу Кеплера треугольник Паскаля и биномиальные коэффициенты оказываются тесно связанными с золотым сечением – одним из важнейших геометрических открытий древней математики, которое в древне-греческой науке выражало гармонию Мироздания.

4. Но одним из самых неожиданных открытий, связанным с треугольником Паскаля, стали *р-числа Фибоначчи,* которые выражаются через диагональные суммы треугольника Паскаля (**Д. Пойа**, **В. Хоггатт**, **А. П. Стахов** и др.).

5. Исследование предела, к которому стремится отношение соседних *р*-чисел Фибоначчи, привело к открытию новых математических констант – *золотых р-сечений* (**А. П. Стахов**), которые были использованы **Э. М. Сороко** при формулировке закона структурной гармонии систем [23].

6. *Р*-числа Фибоначчи неожиданно возникли в *алгоритмической теории измерения* [17], где они задают оптимальную систему весов для так называемых «фибоначчиевых» алгоритмов измерения; «фибоначчиевые» алгоритмы измерения порождают *р-коды Фибоначчи* (**А. П. Стахов**), которые привели к созданию новой компьютерной арифметики (*арифметики Фибоначчи* [20]) и новой концепции компьютеров (*компьютеров Фибоначчи).*

7. Треугольник Паскаля имеет косвенное отношение и к *системам счисления с иррациональными основаниями* (**Дж. Бергман**, **А. П. Стахов**), которые переворачивают наши представления о системах счисления и могут стать началом новой теории чисел – *«золотой» теории чисел* [28]–[31].

8. Треугольник Паскаля и биномиальные коэффициенты лежат в основе *биномиальных алгоритмов измерения* (**А. П. Стахов**, [17]) и *биномиальной системы счисления* (**А. А. Борисенко**, [33])

9. Все это дает основание утверждать, что именно треугольник Паскаля является фундаментальным математическим объектом, который лежит в основе *математики гармонии (МГ)* [13] – нового междисциплинарного направления современной науки, которое можно назвать *МГ-1*.

10. Числовые фрактальные субструктуры треугольника Паскаля, в полной мере открытые в работах **С. К. Абачиева** ([1]–[4] и данная статья), указывают на перспективы качественного углубления математики гармонии, что́ может привести к созданию *математики гармонии-2 (МГ-2),* которая будет *непосредственно и органично* связана с фрактальной геометрией.

В реальной теоретической науке новые теории никогда не создаются в одиночку, одноактно, по принципу «А почему бы не углубить старую теорию?». Формирование научных теорий – полярная противоположность создания философских трактатов. Научные теории формируются коллегиально, поэтапно и не иначе, как ***в ходе*** решения частных задач ***и во имя*** наиболее эффективного решения частных задач. В физико-математических науках процесс их формирования неотделим от вычислений, повышенная точность которых нередко весьма желательна.

В настоящее время интенсивно разрабатываются фрактальные информационные технологии, информационные технологии на основе теории динамического хаоса, с оптимальным псевдошумовым кодированием информации по типу голографического. В соответствующие расчётные методы числовые фракталы треугольника Паскаля уже сейчас могут внести повышенную точность. Имеется в виду то, что они вместо приближённых расчётов с помощью формулы Стирлинга дают возможность точного представления биномиальных коэффициентов. Как подчёркивалось в § 1, вычислительная математика после пионерских исследований **М. Фейгенбаума** и, особенно, **Б. Мандельброта** перестала играть традиционную сугубо вспомогательную роль. Она стала открывать фундаментальные законы природы поистине вселенской общности. Представляется правдоподобным, что использование качественно новых вычислительных способностей треугольника Паскаля и станет первым шагом на пути формирования будущей МГ-2.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Абачиев С. К.** О треугольнике Паскаля, простых делителях и фрактальных структурах // В мире науки, 1989, № 9.
2. **Абачиев С. К.** Треугольник Паскаля даёт новые стимулы для разработки математики гармонии. Части 1 и 2. // Сайт Академии Тринитаризма, эл. № 77–6567, публ. 15301 от 21.05.2009 и 15308 от 28.05.2009.
3. **Абачиев С. К.** Математика гармонии глазами историка и методолога науки. // Сайт Академии Тринитаризма, эл. № 77–6567, публ. 15991 от 11.07.2010. (См. ***статью вторую*** в данной серии статей.)
4. **Абачиев С. К.** Математика гармонии: от разработки «по горизонтали» к разработке «по вертикали». // Сайт Академии Тринитаризма, эл. № 77–6567, публ. 16008 от 22.07.2010. (См. ***статью четвёртую*** в данной серии статей.)
5. **Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х.** Красота фракталов. *(Образы комп-лексных динамических систем.)* – М.: Мир, 1993.
6. **Юргенс Х, Пайтген Х.-О, Заупе Д.** Язык фракталов // В мире науки, 1990, № 10.
7. Harmony of spheres. The Oxford dictionary of philosophy, Oxford University Press, 1994, 1996, 2005
8. Vladimir Dimitrov. A new kind of social science. Study of self-organization of human dynamics. Morrisville Lulu Press, 2005.
9. **Stakhov A. P.** The Golden Section and Modern Harmony Mathematics. Applications of Fibonacci Numbers, Volume 7, 1998.
10. **Воробьев Н. Н.** Числа Фибоначчи. Москва, Наука, 1978.
11. **Hoggat V. E. Jr.** Fibonacci and Lucas Numbers. - Boston, MA: Houghton Mifflin, 1969.
12. **Vajda S.** Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section. Theory and Applications. - Ellis Horwood limited, 1989.
13. **Stakhov A. P.** The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. World Scientific, 2009.
14. **Стахов А. П.** Математизация гармонии и гармонизация математики // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16897, 16.10.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/100a/02320066.htm
15. **Пойа Д.** Математическое открытие (перевод с англ.). Москва: Наука, 1970 (английское издание, том 1, 1962, том 2, 1965).
16. **Hoggatt V. E.** A new angle on Pascal Triangle. The Fibonacci Quarterly, 1968, v.6, №4
17. **Стахов А. П.** Введение в алгоритмическую теорию измерения. Москва, Советское Радио, 1977 г.
18. **Витенько И. В., Волков А. А., Стахов А. П.** Оптимальные алгоритмы функционирования преобразователей «напряжение-код». В кн. «Техисы докладов V научно-технической конференции «Кибернетические пути совершенствования измерительной аппаратуры», ЛОП НТО
19. **Витенько И. В., Стахов А. П.** Теория оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования. – В кн. Приборы и системы автоматики, вып. 11. Харьков, Изд-во

Харьковского университета, 1970.
20. **Стахов А. П.** Избыточные двоичные позиционные системы счисления. В кн. Однородные цифровые вычислительные и интегрирующие структуры, вып.2. Изд-во Таганрогского радиотехнического института, 1974 г.
21. **Стахов А. П.** «Золотая» пропорция в цифровой технике. Автоматика и вычислительная техника, №1, 1980 г.
22. **Стахов А. П.** Коды золотой пропорции. Москва: Советское радио, 1984.
23. **Сороко Э. М.** Структурная гармония систем. Минск: Наука и техника, 1984
24. **Bergman G.** A number system with an irrational base // Mathematics Magazine, 1957, No 31: 98-119.
25. **Стахов А. П.** Тьюринг, филлотаксис, математика гармонии и «золотая» информационная технология. Часть 1. Математика Гармонии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14876, 16.09.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321089.htm
26. **Стахов А. П.** Тьюринг, филлотаксис, математика гармонии и «золотая» информационная технология. Часть 2. «Золотая» Информационная Технология // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14878, 19.09.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321090.htm
27. **Стахов А. П.** Микропроцессоры Фибоначчи, как одна из базисных инноваций будущего технологического уклада, изменяющих уровень информационной безопасности систем // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16759, 16.08.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321212.htm
28. **Стахов А. П.** Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа. Украинский математический журнал, том. 56, 2004 г.
29. **Стахов А. П.** Системы счисления с иррациональными основаниями и новые свойства натуральных чисел // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16778, 24.08.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321216.htm
30. **Стахов А. П.** К обоснованию «золотой» теории чисел: *F*- и *L*-коды натуральных чисел // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16792, 29.08.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321221.htm
31. **Стахов А. П.** К обоснованию «золотой» теории чисел: троичная зеркально-симметричная арифметика, основные достижения и перспективы развития новой теории чисел // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16816, 03.09.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321226.htm
32. **Борисенко А. А**. Биномиальный счет. Теория и практика. Сумы, «Университетская книга». 2004. – 167 с.
33. **Абачиев С. К.** Эволюционная теория познания: опыт систематического построения. – М.: URSS, 2004.
34. **Чейтин Г.** Случайность в арифметике // В мире науки, 1988, № 9.
35. **Абачиев С. К.** Формальная логика с элементами теории познания: Учебник. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2012.
36. **Абачиев С. К.** Концепции современного естествознания. *(Конспект лекций. Словарь-справочник. Современная наука в картинах, в красках и в лицах.):* Учебник. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2012.
37. **Абачиев С.** К. Социальная философия: Учебник. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2012.
38. **Абачиев С. К.** Подлинная наука и спекулятивная псевдонаука // В защиту науки: Бюллетень Комиссии Президиума РАН по борьбе с лженаукой и фальсификацией научных исследований. – М.: Наука, 2008, № 3.